پول ديراك



مبادئ ميكانيكا الكم

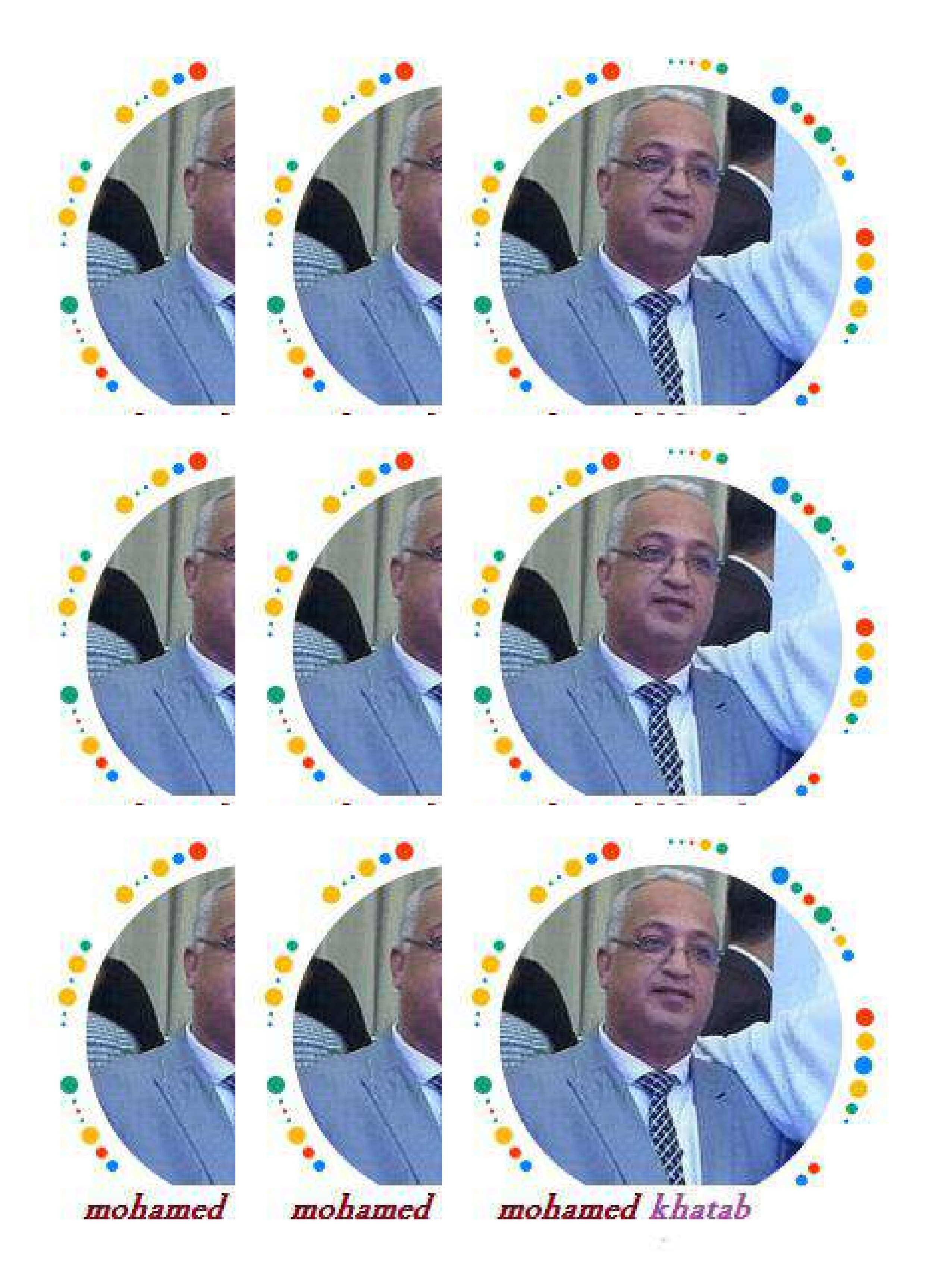


ترجمة

أ.د. محمد أحمد العقر

أ.د. عبد الشافي فهمي عباده

مبادئ ميكانيكا الكم


mohamed
mohamed
mohamed khatab

مبادئ ميكانيكا الكم

تأليف

بول ديراك

ترجمة ومراجعة

أ.د./ محمد أحمد العقر

أ.د./ عبد الشافي فهمي عبادة





The Principles of Quantum Mechanics

مبادئ ميكانيكا الكم

P. A. M. Dirac

بول ديراك

الطبعة الأولى ١٤٣١هـ-٢٠١٠م
رقم إيداع ٢٠٠٥/٢٠١٠

كلمة
ص.ب. ٢٣٨٠ أبوظبي، الإمارات العربية المتحدة
هاتف: ٦٣١٤٤٦٨ ٢ ٩٧١+ **فاكس:** ٦٣١٤٤٦٢ ٢ ٩٧١+
البريد الإليكتروني: info@kalima.ae
الموقع الإليكتروني: http://www.kalima.ae

كلمات عربية للترجمة والنشر
مكتب رقم ٤، عقار رقم ٢١٩٠، زهراء مدينة نصر، القاهرة
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٢٧٤٣١ ٢٠٢+ **فاكس:** ٢٢٧٠٦٣٥١ ٢٠٢+
البريد الإليكتروني: kalimatarabia@kalimatarabia.com
الموقع الإليكتروني: http://www.kalimatarabia.com

ديراك، بول.
مبادئ ميكانيكا الكم/بول ديراك؛ ترجمة: محمد أحمد العقر، عبد الشافي فهمي عبادة . - القاهرة : كلمات عربية للترجمة والنشر، ٢٠١٠.
٣٨٤ص، ١٦,٥×٢٣,٠سم
تدمك: ٤ ٤٤ ٦٢٦٣ ٩٧٧ ٩٧٨
١- ميكانيكا الكم
أ- العقر، محمد أحمد (مترجم)
ب- عبادة، عبد الشافي فهمي (مترجم مشارك)
جـ- العنوان
٥٣٠,١٢

المحتويات

مقدمة الطبعة الرابعة

الفرق الأساسي بين هذه الطبعة والطبعة الثالثة هو إعادة كتابة الفصل الخاص بإلكتروديناميكا الكم. تصف إلكتروديناميكا الكم المعطاة في الطبعة الثالثة حركة جسيمات متفرقة مشحونة تتحرك خلال مجال كهرومغناطيسي، في تشابه قريب من الإلكتروديناميكا الكلاسيكية، إنها صيغة لنظرية يكون فيها عدد الجسيمات المشحونة ثابتًا ولا يمكن تعميمها لتسمح بتغير في عدد الجسيمات المشحونة.

في فيزياء الطاقة العالية الحالية، إنشاء (بناء) وإلغاء (هدم) جسيمات مشحونة شيء شائع الحدوث، فإلكتروديناميكا الكمّ تتطلب حفظ عدد الجسيمات المشحونة بعيدًا عن الإحساس بالحقائق الفيزيائية. وعليه فقد استبدلت بها إلكتروديناميكا كمٍّ تشمل إنشاء وإلغاء أزواج الإلكترون والبوزترون. يتضمن هذا التخلي عن التشابه مع نظرية الإلكترون الكلاسيكية، ولكن يزودنا بوصف قريب للطبيعة. يظهر أن المفهوم الكلاسيكي للإلكترون لم يعد نموذجًا نافعًا في الفيزياء، إلا في النظريات الأولية المقيدة بظواهر الطاقة المنخفضة.

المؤلف: ب. أ. م. د.

كلية سانت جورج، بكمبردج

١١ مايو ١٩٥٧

ملاحظة على تنقيح الطبعة الرابعة

لقد سنحت الفرصة لإعادة كتابة أجزاء من الفصل الثاني عشر (إلكتروديناميكا الكم) وإضافة بابين عن التفسير والتطبيقات.

المؤلف: ب. أ. م. د.

كلية سانت جورج، بكمبردج

٢٦ مايو ١٩٦٧

من مقدمة الطبعة الأولى

لقد طرأ على طرق التقدم في الفيزياء النظرية تغير عميق خلال القرن الحالي (الماضي). لقد كان التقليد الكلاسيكي هو اعتبار العالم عبارة عن ارتباط لأشياء مرصودة (جسيمات، موائع، مجالات، إلخ) تتحرك طبقًا لقوانين محددة للقوى بحيث يستطيع المرء أن يكون صورة ذهنية في المكان والزمان للمشروع كله. أدى هذا إلى فيزياء كان هدفها عمل افتراضات عن آليات وقوى تربط هذه الأشياء المرصودة (المشاهدة)، لحساب تصرفاتها في أبسط صورة ممكنة. في الأزمنة الحديثة ظهر بوضوح أكبر أن الطبيعة تعمل بخطة مختلفة. قوانينها الأساسية لا تحكم العالم كما يظهر في الصورة الذهنية بأي طريقة شديدة المباشرة، ولكن بدلًا من ذلك هي تتحكم في طبقة تحتية لا نستطيع أن نكوّن لها صورة ذهنية بدون إيراد أشياء لا علاقة لها بالموضوع. تتطلب صياغة هذه القوانين استخدام رياضيات التحويلات. تظهر الأشياء المهمة في العالم كلامتغيرات (أو بصورة أعم لامتغيرات تقريبًا، أو كميات لها خواص تحويل بسيطة) لهذه التحويلات. الأشياء التي نحن ملمون بها على الفور هي علاقات هذه اللامتغيرات تقريبيًا مع إطار مرجعي معين، عادة مختار بحيث يقدم ملامح مبسطة خاصة غير مهمة من وجهة نظر النظرية العامة.

النمو في استخدام نظرية التحويلات، بتطبيقها أولًا على نظرية النسبية وثانيًا على ميكانيكا الكم؛ هو جوهر الطريقة الحديثة في الفيزياء النظرية. يقع التقدم الإضافي في اتجاه جعل معادلاتنا لامتغيرة تحت تحويلات أرحب وأرحب. الأمور بهذا الوضع مرضية جدًّا من وجهة النظر الفلسفية، كدلالة على الاعتراف المتزايد بالدور الذي يقوم به المشاهد بنفسه بتقديم التناسقات التي تظهر في مشاهداته، وتقليص الاختيارية في سبل الطبيعة، ولكن تجعل الأمور أقل سهولة بالنسبة لمن يتعلم الفيزياء. تبنى النظريات الحديثة، بعيدًا عن الخلفية الرياضية؛ على مفاهيم فيزيائية لا يمكن شرحها بدلالة أشياء معروفة مسبقًا للطالب، وقد لا يمكن حتى شرحها على الإطلاق بطريقة

مناسبة من خلال كلمات مثل المبادئ الأساسية (كالقرب والتطابق) التي يجب على كل واحد أن يتعلمها منذ نعومة أظافره، فالمفاهيم الجديدة في الفيزياء يمكن إتقانها فقط بالاعتياد الطويل على خواصها واستخداماتها.

من جانب الرياضيات فإن المقاربة للنظريات الحديثة لا تعرف أية مشكلات؛ حيث إن الرياضيات المطلوبة لا تختلف في الأساس كثيرًا عما كان سائرًا لفترة طويلة من الزمن. الرياضيات هي المعدة المناسبة للتعامل خصوصًا مع المفاهيم المجردة من أي نوع وليس هناك أي حد لقدراتها في هذا المجال. لهذا السبب فإن أي كتاب عن الفيزياء الحديثة، إن لم يكن كتابًا وصفيًّا عن العمل التجريبي؛ يجب أن يكون أساسًا رياضيًّا. على كل حال الرياضيات ما هي إلى عدة وعتاد، وعلى المرء أن يتعلم أن يدرك الأفكار الفيزيائية في عقله دون الرجوع إلى الصيغة الرياضية. في هذا الكتاب حاولت أن أحافظ على الفيزياء في المقدمة بأن أبدأ بفصل فيزيائي محض، وفي الدراسة التالية يتم اختيار المعنى الفيزيائي فيما وراء الصيغة كلما أمكن ذلك. إن كمية الخلفية النظرية التي يجب على المرء أن يتعلمها، قبل أن يستطيع حل مسائل ذات قيمة عملية؛ جد كبيرة، ولكن هذا الظرف نتيجة لا مفر منها للجزء الأساسي الذي تقدم به نظرية التحويلات، وغالبًا ما سيصبح أعلى كميًّا في الفيزياء النظرية في المستقبل.

فيما يتعلق بالصورة الرياضية التي يمكن أن تقدم بها النظرية، فإن على المؤلف أن يقرر من البداية الاختيار من بين طريقتين. هناك الطريقة الرمزية، التي تتعامل مباشرة بطريقة مجردة مع الكميات ذات الأهمية الأساسية (اللامتغيرات ... وإلخ هذه التحويلات). وهناك طريقة الإحداثيات أو التمثيلات، التي تتعامل مع فئات من الأعداد المناظرة لهذه الكميات. الطريقة الثانية استعملت غالبًا في تقديم ميكانيكا الكم (في الحقيقة لقد استخدمت عمليًّا استخدامًا شاملًا مع الاستثناء الوحيد في كتاب الزمر وميكانيكا الكم لمؤلفه ڤيل Weyl). وهي معروفة بأحد الاسمين «الميكانيكا الموجية» أو «ميكانيكا المصفوفة»، طبقًا لنوعية الأشياء الفيزيائية التي تتلقى مجمل التركيز في المعالجة، أهي حالات المنظومة أم متغيراتها الديناميكية. إن لها ميزة أساسية وهي أن نوعية الرياضيات المطلوبة أكثر ألفة للطالب المتوسط بجانب أنها الطريقة التاريخية.

ومع ذلك يظهر أن الطريقة الرمزية تتعمق أكثر في طبيعة الأشياء، إنها تساعد المرء على التعبير عن القوانين الطبيعية بطريقة أنيقة ووجيزة، ومن المحتمل أن تستعمل بكثرة في المستقبل بالتعمق في فهمها وتطوير الرياضيات الخاصة بها. من أجل ذلك

اخترت الطريقة الرمزية مع تقديم الممثلات مؤخرًا كمجرد مساعد للحسابات العملية. لقد تطلب هذا انفصالًا كاملًا عن الخط التاريخي للتطور، ولكن هذا الانفصال له ميزة إذ إنه يجعل التواصل مع الأفكار الجديدة أكثر مباشرة.

المؤلف: ب. أ. م. د.
كلية سانت جورج، بكمبردج
٢٩ مايو ١٩٣٠

عن المؤلف

بول أدريان موريس ديراك

- ولد في بريستول — بالمملكة المتحدة في ٨ أغسطس ١٩٠٢م.
- تلقى تعليمه أولًا في جامعة بريستول في الهندسة الكهربائية عام ١٩٢١م.
- استمر مدة عام في دراسة الرياضيات.
- انتقل عام ١٩٢٣ إلى كلية سانت جورج بكمبردج كطالب بحث في الرياضيات.
- نشر أول بحث له عن القوانين الأساسية لميكانيكا الكم الجديدة عام ١٩٢٥م.
- حصل على درجة الدكتوراه عام ١٩٢٦م.
- وضع أسس ميكانيكا الكم النسبية عام ١٩٢٧م. حيث وضع المعادلة النسبية لحركة الإلكترون وهي المعادلة التي حملت اسمه فيما بعد.
- طور نظرية اللف الإلكتروني عام ١٩٢٨م.
- نتيجة لحل معادلة ديراك النسبية تنبأ بوجود جسيم البوزوترون الذي اكتشف عمليًّا لاحقًا في ١٩٣٢م.
- نال جائزة نوبل في الفيزياء عام ١٩٣٣م بالاشتراك مع أروين شرودنجر.
- عين أستاذًا في كلية سانت جورج بكمبردج حتى عام ١٩٦٩م.
- وأستاذًا في جامعة فلوريدا عام ١٩٧١م.
- زار العديد من دول العالم محاضرًا وباحثًا.
- أصدر العديد من الكتب المهمة كان أولها كتاب «مبادئ ميكانيكا الكم» عام ١٩٣٠م. وظل ينقح فيه حتى عام ١٩٦٧م، وكان آخرها كتاب «النظرية النسبية العامة» عام ١٩٧٥م.
- توفي في ٢٠ أكتوبر ١٩٨٤م.

مقدمة الترجمة العربية

الحمد لله رب العالمين وكفى، وصلاة وسلامًا على عباده الذين اصطفى ....

لأول مرة يُقدَّم كتاب بول ديراك «مبادئ ميكانيكا الكم» في طبعته العربية. وهذا الكتاب من أوائل الكتب التي كُتبت عن ميكانيكا الكم مع بدايات بزوغ هذا العلم في عشرينيات القرن الماضي. وهو مكتوب بيد واحد من واضعي أسس هذا العلم الذي ظل منشغلًا به إلى قبيل وفاته. فظل يعيد أجزاءً منه كلما سنحت الفرصة لإصدار طبعة حديثة، أو ينقح بعض فصوله في إعادة لطبعة من طبعاته.

لقد عمد المؤلف إلى استخدام الرياضيات كمدخل أساسي لمناقشة الظواهر الفيزيائية، بعد أن قدم لهذا بفصل فيزيائي خالص يعتمد على المشاهدات المعملية في تجارب عملية. وكأنما كان المؤلف يستشرف المستقبل حينما كتب في مقدمة الطبعة الأولى عام (١٩٣٠) عن الطريقة الرمزية: «من المحتمل أن تستعمل بكثرة في المستقبل بالتعمق في فهمها وتطوير الرياضيات الخاصة بها.» إذ إن نظرية المجالات الكمية (أو الإلكتروديناميكا الكمية النسبية) فرضت طرائق جديدة وأنماطًا من الرياضيات حديثة وما زالت قيد التطور.

وبفكر ثاقب ونظرات مدققة يشرح المؤلف المفاهيم الفيزيائية بعد أن يكون قد مهد لها بالخلفية الرياضية ويمضي في بعض الأحيان بتقديم النظرة الفيزيائية ثم يعرج على الشروط الرياضية التي تنبع من هذه النظرة.

لقد حاولت الترجمة نقل فكر المؤلف في أقرب صورة ممكنة وحافظت على الرموز المستخدمة، أمانة في النقل، وإن كانت الكتب الحديثة قد تجاوزتها.

والله نسأل أن ينتفع قراء العربية بهذا الكتاب الذي يُعد لؤلؤة الكتب التراثية في هذا الموضوع.

والله الموفق وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المترجمان، القاهرة، يناير ٢٠٠٩

الفصل الأول

مبدأ التراكب

١- الحاجة إلى نظرية كم

تطورت «الميكانيكا التقليدية» بصورة مستمرة منذ نيوتن وطبقت على مدى آخذ في الاتساع من الأنظمة الديناميكية، متضمنة تفاعل المجال الكهرومغناطيسي مع المادة. وتُكَون الأفكار الأساسية والقوانين الحاكمة للتطبيق مشروعًا سهلًا وأنيقًا، بحيث يميل المرء إلى التفكير في صعوبة جدية تبديلها دون إتلاف كل ملامحها الجذابة. على أية حال فقد وجد أنه من الممكن بناء مشروع جديد، يعرف بميكانيكا الكم، أكثر مناسبة لوصف الظواهر في المدى الذري ويكون في بعض جوانبه أشد أناقة وأكثر قبولًا من المشروع التقليدي. وترجع هذه الإمكانية إلى التغييرات التي يتضمنها المشروع الجديد ذات خصائص عميقة ولا تتعارض مع الملامح في المشروع التقليدي التي تجعله شديد الجاذبية، ونتيجة لذلك فإن هذه الملامح يمكن تضمينها في المشروع الجديد.

وأوضحت النتائج المعملية جليًّا ضرورة التخلي عن الميكانيكا التقليدية (الكلاسيكية) ففي المقام الأول نجد أن القوى في الإلكتروديناميكا التقليدية (الكلاسيكية) غير صالحة لتفسير الاستقرار الملحوظ في الذرات والجزيئات، والضروري من أجل أن يكون للمواد أي خصائص فيزيائية وكيميائية بصورة مطلقة. على أن تقديم قوى افتراضية جديدة لن ينقذ الموقف، حيث توجد مبادئ عامة للميكانيكا التقليدية، تصلح لكل أنواع القوى، تؤدي إلى نتائج تتناقض مباشرة مع الملاحظات. فمثلًا، إذا كان هناك نظام ذري اختل اتزانه بصورة ما ثم ترك بمفرده، فإنه سوف يتذبذب ومن ثم تنطبع هذه الذبذبات على المجال الكهرومغناطيسي المحيط، بحيث يمكن ملاحظة هذه الذبذبات بواسطة المطياف (سبكتروسكوب). والآن مهما كانت قوانين القوى التي تحكم الاتزان، فمن المتوقع احتواء الترددات المختلفة في شكل يتكون من بعض الترددات الأساسية ومضاعفاتها. ولكن ليست هذه هي الحالة المشاهدة. وبدلًا من ذلك، يلاحظ وجود ترددات جديدة

وارتباط غير متوقع بين هذه الترددات، وهي ما يعرف بقانون توفيق «ريتز» للأطياف Ritz combination law، ووفقًا لهذا القانون فإن كل الترددات يمكن أن تمثل بفروق بين حدود معينة، وعدد هذه الحدود أقل من عدد الترددات. إلا أن هذا القانون لا يمكن فهمه طبقًا لوجهة النظر الكلاسيكية.

ولو حاول المرء تخطي هذه الصعوبة دون التخلي عن الميكانيكا التقليدية بافتراض أن كل الترددات الملاحظة طيفيًّا ترددات أساسية لها درجة حريتها، فإن قوانين القوى تؤدي إلى عدم حدوث مضاعفات الترددات. ومثل هذه النظرية لا تفي بالغرض، حيث إنها لا تعطي تفسيرًا لقانون التوفيق لريتز، حيث إنها تؤدي إلى تعارض مع الدلائل العملية لقياسات الحرارات النوعية. وتمكن الميكانيكا الإحصائية التقليدية المرء من بناء علاقة عامة بين العدد الكلي لدرجات الحرية لمجموعة من المنظومات المهتزة وحرارتها النوعية. وإذا افترض المرء أن كل الترددات الطيفية لذرة تناظر درجات حرية مختلفة، فسوف يحصل على حرارة نوعية لأي مادة أعلى بكثير من القيم المقيسة. وفي الحقيقة فإن الحرارة النوعية المقيسة عند درجة حرارة ما تعطى بدقة بالنظرية التي تأخذ في الاعتبار حركة كل ذرة ككل ولا تعير اهتمامًا على الإطلاق لأي حركة داخلية للذرة.

ويقودنا هذا إلى صدام جديد بين الميكانيكا التقليدية والنتائج المعملية. يوجد بالتأكيد بعض الحركات داخل أي ذرة حتى يتم حساب الطيف لها، ولكن درجات الحرية الداخلية، لسبب تقليدي (كلاسيكي) غامض، لا تساهم في الحرارة النوعية. كما يوجد صدام مشابه يتعلق بطاقة تذبذب المجال الكهرومغناطيسي في الفراغ. حيث تتطلب الميكانيكا الكلاسيكية أن تكون الحرارة النوعية المقابلة لهذه الطاقة لانهائية، ولكن الملاحظ هو كونها محدودة. وهناك استنتاج عام من النتائج العملية وهو أن الاهتزازات عالية التردد لا تساهم بنصيبها الكلاسيكي في الحرارة النوعية.

وكمثال آخر على فشل الميكانيكا التقليدية (الكلاسيكية) نسوق سلوك الضوء. فلدينا من ناحية، ظاهرتا التداخل والحيود، اللتان يمكن تفسيرهما فقط على أساس النظرية الموجية، ومن ناحية أخرى، فظواهر مثل الانبعاث الكهروضوئي والتشتت بواسطة الإلكترونات الحرة؛ تظهر أن الضوء يتكون من جسيمات صغيرة. وهذه الجسيمات، التي تعرف بالفوتونات، لكل منها طاقة محددة وكمية حركة، تعتمدان على تردد الضوء، والتي تبدي وجودًا حقيقيًّا كجسيمات مثل الإلكترونات، أو أي جسيمات أخرى معروفة في الفيزياء. على أنه لم يلاحظ على الإطلاق وجود أجزاء للفوتون.

ولقد أوضحت التجارب أن هذا السلوك الشاذ (غير الطبيعي) ليس مقصورًا على الضوء، ولكنه سلوك عام. فكل الجسيمات المادية لها خواص موجية، يمكن أن

تظهر تحت ظروف مناسبة. ولدينا هنا مثال واضح وعام لانهيار الميكانيكا التقليدية (الكلاسيكية) ليس فقط عدم دقة في قوانينها التي تصف الحركة، «ولكن عدم مواءمة في مفاهيمها لكي تمدنا بوصف للأحداث في نطاق الذرات».

وتظهر الحاجة إلى ضرورة الابتعاد عن الأفكار التقليدية عند تفسير التركيب النهائي للمادة، ليس فقط من الحقائق الثابتة معمليًّا، ولكن أيضًا من أسس فلسفية عامة. في التفسير التقليدي لتركيب المادة يمكن افتراض تكونها من عدد كبير من أجزاء صغيرة، ويفترض المرء قوانين لتصرف هذه الأجزاء ومنها يمكن استنتاج قوانين المادة ككل. ولكن هذا يترك التفسير منقوصًا، حيث إن تركيب وثبات هذه الأجزاء المكونة قد ترك دون أن يمس. ولمعالجة هذا السؤال، يصبح من الضروري افتراض أن كل جزء من المكونات يتكون نفسه من أجزاء أصغر يمكن من خلالها تفسير سلوكها. ومن الواضح استمرار هذا الأسلوب بلا نهاية، وبذلك لا يصل المرء إلى التركيب النهائي للمادة عبر هذا الطريق. وحيث إن «كبير» و«صغير» هو مفهوم نسبي، فلا يمكن تفسير الكبير من خلال الصغير. ولذا فإنه من الضروري تعديل الأفكار التقليدية بطريقة تؤدي إلى إعطاء قيمة مطلقة لمفهوم الحجم.

ويصبح من المهم عند هذه المرحلة أن نتذكر أن العلم يتعلق فقط بالأشياء المشاهدة وأنه يمكننا ملاحظة شيء ما عن طريق تفاعله مع بعض التأثيرات الخارجية. وعملية الملاحظة تكون مصحوبة بالضرورة ببعض الاضطرابات للشيء الملاحظ. ويمكن تعريف أن شيئًا كبيرًا، إذا كان الاضطراب المصاحب لملاحظتنا مهملًا، ويكون الشيء صغيرًا عندما يكون الاضطراب أكبر من أن يهمل. وهذا التعريف متوافق كثيرًا مع المعنى العام لكبير وصغير.

وعادة يفترض أنه بشيء من الحرص، ومع الدقة، يمكن تحديد مدى الاضطرابات المصاحبة للمشاهدات لأي دقة نبتغيها. وعليه فإن مفهوم الكبر والصغر يكون نسبيًّا تمامًا ويعود إلى لطف وسائل قياسنا إلى جانب الشيء المراد وصفه. ولإعطاء معنى مطلق للحجم، وكما تتطلب أي نظرية للتركيب النهائي للمادة، يجب افتراض أن «هناك نهاية لحدود دقة قدرات الملاحظة وصغر الاضطرابات المصاحبة. هذه النهاية ملازمة لطبيعة الأشياء ولا يمكن تخطيها باستخدام تقنيات متطورة أو مهارات متزايدة من جانب المشاهد». وفي حالة كون الاضطرابات التي لا يمكن تحاشيها مهملة بالنسبة للجسم قيد الملاحظة فإن الجسم يكون كبيرًا بالمعنى المطلق ويمكن تطبيق الميكانيكا التقليدية (الكلاسيكية) عليه. ومن ناحية أخرى، إذا كانت هذه الاضطرابات لا يمكن إهمالها فإن الشيء يعتبر صغيرًا في المفهوم المطلق ونحتاج نظرية جديدة لمعالجته.

وتبعًا للمناقشة السالفة يجب علينا إعادة النظر في أفكارنا حول السببية. وتستخدم السببية فقط في حالة الأنظمة المتروكة دون أي اضطراب. وإذا كانت المنظومة صغيرة فلا يمكن ملاحظتها بدون توليد اضطراب جدي، ومن ثم لا يمكن أن نتوقع أي علاقة سببية بين نتائج ملاحظاتنا. وسنظل نعتبر أن السببية مطبقة بالنسبة للمنظومات غير المضطربة، وستكون المعادلات التي ستكتب لوصف منظومة غير مضطربة هي معادلات تفاضلية تعبر عن العلاقة السببية بين الظروف في لحظة ما والظروف في لحظة تالية. وستكون هذه المعادلات قريبة التناظر جدًّا مع معادلات الميكانيكا الكلاسيكية، ولكنها ستكون مرتبطة فقط بطريقة غير مباشرة مع نتائج الملاحظات. وهناك عدم تحديد لا يمكن تفاديه في حساب نتائج الملاحظة، وتمكننا النظرية فقط، وعلى وجه العموم من حساب احتمال حصولنا على نتيجة خاصة عند إجراء ملاحظة (رصد أو قياس).

٢- استقطاب الفوتونات

والمناقشة السابقة حول حدود لطف القياس وما يتبعها من عدم تحديد في النتائج لهذه الملاحظات لا تقدم أي أساس كمي لبناء ميكانيكا الكم، ولهذا الغرض نحتاج إلى مجموعة جديدة من قوانين دقيقة للطبيعة. إن أحد أهم القوانين الأساسية وأشدها فاعلية هو «مبدأ تراكب الحالات» Principal of Superposition وسوف ننتهي إلى وضع صيغة عامة لهذا المبدأ من خلال استعراض بعض الحالات الخاصة بادئين بالمثال الذي يقدمه استقطاب الضوء.

من المعروف عمليًّا أنه عند سقوط الضوء المستقطب في مستوى لإخراج الإلكترونات الضوئية من المادة، يكون هناك اتجاه مفضل لانبعاث الإلكترونات، ومن ثم فإن الخواص الاستقطابية للضوء مرتبطة بشدة مع خصائصه الجسيمية، ويجب على المرء أن يعزو للفوتونات استقطابًا. ويُعتبر المرء — للحظة — شعاعًا من الضوء المستقطب في مستوى في اتجاه معين باعتباره مكونًا من فوتونات كل منها مستقطب في هذا الاتجاه وشعاعًا مستقطبًا استقطابًا دائريًّا باعتباره مكونًا من فوتونات كل منها مستقطب دائريًّا. أي أن كل فوتون من هذه الفوتونات في حالة معينة من الاستقطاب، كما سوف نقول: المسألة الآن أنه يجب أن نضع في اعتبارنا توافق هذه الأفكار مع الحقائق المعروفة حول «تحلل» «الضوء» إلى مركبات مستقطبة وإعادة تركيب هذه المركبات.

دعنا نأخذ حالة محددة: نفترض أن لدينا شعاعًا ضوئيًّا يمر من خلال بلورة تورمالين التي لها خاصية السماح بمرور الضوء المستقطب عموديًّا على اتجاه محورها

البصري. وتخبرنا الإلكتروديناميكا التقليدية ما سوف يحدث لأي استقطاب في الشعاع الساقط. إذا كان الاستقطاب عموديًّا على المحور البصري فسوف يمر الشعاع كله خلال البلورة، أما إذا كان الاستقطاب موازيًا للمحور البصري فلن يمر من الشعاع شيء. وفي حالة ما إذا كان الاستقطاب يصنع زاوية α مع المحور البصري فإن جزءًا قدره $\sin^2\alpha$ سوف يمر. كيف يمكن لنا فهم هذه النتائج على أساس قاعدة الفوتون؟

الشعاع المستقطب في اتجاه معين يمكن تصوره كما لو كان مكونًا من فوتونات كل منها مستقطب في هذا الاتجاه، ولا تؤدي هذه الصورة إلى أي صعوبة في حالة أن الشعاع الساقط يكون مستقطبًا في اتجاه موازي أو عمودي على المحور البصري. فعلينا مجرد أن نفترض أن كل فوتون مستقطب عمودي على المحور سوف يمر في البلورة دون أي تغيير أو تأخير. بينما كل فوتون مستقطب موازي للمحور سوف يتوقف ويتم امتصاصه. على أنه تظهر الصعوبة في حالة الشعاع الساقط ويميل اتجاه استقطابه على اتجاه المحور، وتكون كل الفوتونات الساقطة مستقطبة في اتجاه مائل، وليس واضحًا ما سيحدث لكل فوتون عند وصوله إلى التورمالين.

والسؤال حول ما سوف يحدث لفوتون معين تحت ظروف محددة ليس سؤالًا دقيقًا. ولجعله دقيقًا يجب على المرء تخيل بعض التجارب المجراة المتعلقة بالسؤال لمعرفة ما سوف يحدث نتيجة هذه التجربة، والأسئلة حول نتائج التجربة هي فقط التي تحمل مغزىً حقيقيًّا، وتكون الفيزياء النظرية هي التي تعتبر مثل هذه الأسئلة.

في مثالنا الحالي تكون التجربة الواضحة هي التي تستخدم فوتونًا واحدًا ثم تلاحظ ما يظهر في الجانب الخلفي من البلورة. وفقًا لميكانيكا الكم فإن نتائج هذه التجربة سوف تكون وجود فوتون واحد كامل بنفس طاقة الفوتون الساقط بالجانب الخلفي للبلورة أحيانًا، وأحيانًا أخرى لن نجد شيئًا. وعندما يجد المرء فوتونًا كاملًا فسوف يكون مستقطبًا عموديًّا على المحور البصري ولن يجد المرء أبدًا جزءًا من فوتون في الجانب الخلفي. وإذا كرر المرء هذه التجربة مرات عديدة فإنه سوف يجد الفوتون في الجانب الآخر بعدد قيمته $\sin^2\alpha$ من العدد الكلي لمرات إجراء التجربة. ومن ثم يمكن القول إن الفوتون لديه احتمال مقداره $\sin^2\alpha$ للمرور من خلال بلورة التورمالين ويظهر في الجانب الآخر مستقطبًا عموديًّا على المحور البصري واحتمال قدره $\cos^2\alpha$ ليمتص. وهذه القيم للاحتمالات تؤدي إلى نتائج تقليدية صحيحة لشعاع ساقط مكون من عدد كبير من الفوتونات.

وبهذه الطريقة فقد حافظنا على فردية كل فوتون في كل الحالات. على أننا قادرون على عمل هذا، على أية حال، فقط بسبب تخلينا عن القطعية (الحتمية) في النظرية

التقليدية. ونتيجة تجربة ما ليست محددة كما كان متوقعًا وفقًا للأفكار التقليدية بواسطة الشروط التي يتحكم فيها من يجري التجربة. وأكثر ما يمكن التنبؤ به هو مجموعة من النتائج الممكنة، لكل منها احتمال حدوث.

والمناقشة السالفة حول النتيجة لتجربة ما في حالة فوتون مفرد مستقطب في اتجاه مائل وساقط على بلورة تورمالين؛ تجيب على كل ما يمكن تصوره من أسئلة مشروعة حول ما يحدث لفوتون مستقطب في اتجاه مائل عندما يصل إلى التورمالين. وأما الأسئلة حول ما الذي يقرر أن يمر الفوتون أو لا يمر خلال البلورة، وكيف يغير اتجاه استقطابه عندما يمر؟ لا يمكن إجابتها بالتجربة بل يجب اعتبارها خارج نطاق العلم. على أية حال، هناك وصف إضافي ضروري من أجل الربط بين نتائج هذه التجربة مع نتائج تجارب أخرى يمكن أن تجرى على الفوتونات، بحيث تتوافق كل هذه النتائج في مشروع عام. وهذا الوصف الإضافي يجب ألا ينظر إليه كمحاولة إجابة أسئلة في نطاق خارج العلم ولكن كعامل مساعد لصياغة قواعد للتعبير المحكم عن نتائج تجارب عديدة.

يجرى الوصف الإضافي الذي أدت إليه ميكانيكا الكم كالآتي: بافتراض سقوط فوتون مستقطب في اتجاه يميل على المحور البصري وبإمكانية اعتباره (كما لو كان) جزئيًّا في حالة استقطاب موازي للمحور البصري، وجزئيًّا في حالة استقطاب عمودي على المحور البصري. وحالة الاستقطاب المائل يمكن اعتبارها نتيجة نوع ما من عملية تراكب مطبقة على حالتين من الاستقطاب الموازي والعمودي. ويستدعي هذا نوعًا خاصًّا من العلاقة بين حالات الاستقطاب المختلفة وعلاقة مشابهة لتلك التي بين الأشعة المستقطبة في البصريات التقليدية، ولكن يمكن تطبيقها على حالتي الاستقطاب لفوتون واحد معين بدلًا من شعاعين. وتسمح هذه العلاقة بتحليل أي حالة من حالات الاستقطاب، والتعبير عنها كتراكب حالتي استقطاب متعامدين.

وعندما نسمح لفوتون بمقابلة بلورة تورمالين فإننا نخضعه بذلك للملاحظة (للرصد) حيث نرصد إن كان مستقطبًا موازيًا أو عموديًّا على المحور البصري وتأثير هذا هو إجبار الفوتون أن يكون كليةً في حالة استقطاب موازي أو كليةً في حالة استقطاب عمودي. وعليه أن يقوم بقفزة فجائية من كونه جزئيًّا في أي من الحالتين، ليصبح كليًّا في إحدى هاتين الحالتين. ولا يمكن التنبؤ بأي من الحالات التي سوف يقفز إليها، ولكن هذا محكوم فقط بقوانين الاحتمالات. فإذا قفز إلى حالة الاستقطاب الموازي فسوف يمتص، أما إذا قفز إلى حالة الاستقطاب العمودي فسوف يمر خلال البلورة ويظهر ناحية البلورة الأخرى محتفظًا بحالة استقطابه هذه.

٣- تداخل الفوتونات

في هذا الفصل سوف نتناول مثالًا آخر للتراكب. وسوف نعالج الفوتونات مرة ثانية، ولكن باعتبار مواضعها في الفراغ وكميات حركاتها بدلًا من استقطابها. إذا أعطينا شعاعًا ضوئيًّا أحادي اللون تقريبًا فيمكن معرفة بعض الأشياء عن مكان وكمية حركة الفوتونات المرافقة له. نعلم أن كلًّا من هذه الفوتونات موجود في مكان ما في منطقة من الفضاء التي يمر بها الشعاع، وأن له متجه كمية حركة في اتجاه تقدم الشعاع، وقيمته تعطى بدلالة تردد الشعاع بقانون «أينشتين» الكهروضوئي حيث تكون كمية الحركة مساوية للتردد مضروبًا في ثابت عام. وعندما يكون لدينا مثل هذه المعلومات حول مكان وكمية حركة الفوتون فسوف نقول إنه في حالة انتقالية محددة translational state.

سنناقش الوصف الذي تقدمه ميكانيكا الكم لتداخل الفوتونات. لنأخذ تجربة معينة توضح عملية التداخل. نفترض أن لدينا شعاعًا ضوئيًّا يمر خلال مقياس تداخل ما بحيث ينقسم الشعاع إلى مركبتين ويسمح لهما بعد ذلك بالتداخل. ويمكن كما في الفصل السابق أن نأخذ شعاعًا ضوئيًّا ساقطًا يتكون من فوتون واحد فقط ونتساءل عما سوف يحدث له عند مروره خلال الجهاز. وسوف يمثل هذا صعوب ة لنا بخصوص التناقض الحاد بين نظريتي الجسيمات والموجات للضوء.

بالتناظر مع وصف حالة الاستقطاب، فيجب وصف الفوتون الآن كما لو كان ذاهبًا جزئيًّا إلى كل من المركبتين التي انقسم إليهما الشعاع. ولهذا فإن الفوتون — كما يمكن أن نقول — في حالة انتقالية تعطى بتراكب الحالتين الانتقاليتين المصاحبتين لكل من المركبتين. وعليه، فقد أدى ذلك بنا إلى تعميم مصطلح «الحالة الانتقالية» وتطبيقه على الفوتون. وليكون الفوتون في «حالة انتقالية» معينة، فليس من الضروري أن يكون مصاحبًا لشعاع واحد من الضوء، بل يمكن أن يكون مصاحبًا لشعاعين أو أكثر من الضوء تكون مركبات لشعاع أصلي* انفصل إلى هذه المركبات. وطبقًا للنظرية الرياضية الدقيقة، فكل حالة انتقالية تكون مصاحبة لدالة موجية واحدة من موجات الضوء العادية، ومثل هذه الدالة الموجية يمكن أن تصف شعاعًا واحدًا أو شعاعين أو أكثر انقسم إليها الشعاع الأصلي. وعليه تكون الحالات الانتقالية قابلة للتراكب بطريقة مشابهة لطريقة تراكب الدوال الموجية.

---

*تعتبر الظروف التي تطلبت تعميم منطقنا الأساسي عن فكرة التراكب بالنسبة للحالات الانتقالية، دون الحاجة لتعميم مناظر في حالات الاستقطاب بالفصل السابق؛ ظروفًا تصادفية بحتة بدون دلائل نظرية محيطة بها.

لنضع في اعتبارنا الآن ما يحدث عندما نعين الطاقة لمركبة واحدة من المركبات. ونتيجة هذا التعيين يجب أن تكون فوتونًا كاملًا أو لا شيء على الإطلاق. ولهذا فإن الفوتون يجب أن يتغير فجأة من كونه جزئيًّا في شعاع وجزئيًّا في شعاع آخر ليكون كاملًا كليةً في شعاع واحد منهما. وهذا التغير الفجائي إن هو إلا نتيجة الاضطراب الذي تحدثه الملاحظة بالضرورة في حالة الفوتون الانتقالية. ومن المستحيل التنبؤ بأي من الشعاعين سيتواجد فيه الفوتون. ويمكن فقط حساب احتمال أي من النتيجتين وذلك من التوزيعات السابقة للفوتون بين الشعاعين.

ويمكن للمرء أن يجري قياسات الطاقة دون تدمير مركبة الشعاع، مثلًا، بانعكاس الشعاع من مرآة متحركة وملاحظة الارتداد. ويسمح وصفنا للفوتون بأن نستدل على أنه بعد قياس الطاقة، لا يمكن أن نتحدث عن أي تأثيرات تداخل بين المركبتين. وطالما أن الفوتون موجود جزئيًّا في شعاع وجزئيًّا في آخر يتم التداخل فقط عندما يتراكب الشعاعان ولكن هذه الإمكانية تختفي عندما يجبر الفوتون على أن يكون كليًّا في أحد الشعاعين عند الرصد. وبذلك لا يدخل الشعاع الآخر في وصف الفوتون. وبذلك يحسب كما لو كان الفوتون كليًّا في أحد الشعاعين بالطريقة المعتادة لأي تجربة تجرى عليه بعد ذلك.

على هذا النهج أصبحت ميكانيكا الكم قادرة على تحقيق التصالح بين الخواص الموجية والجسيمية للضوء. والنقطة الأساسية هي مرافقة أي حالة انتقالية لفوتون مع إحدى الدوال الموجية للبصريات الموجية العادية. ولا يمكن تصور هذا الترافق على أساس الميكانيكا التقليدية، ولكنه شيء جديد تمامًا. ويكون من الخطأ الجسيم تصور الفوتون والموجة المرافقة كما لو كانا يتفاعلان بالطريقة التي تتفاعل بها الموجات والجسيمات في الميكانيكا التقليدية. ويمكن تفسير هذا الترافق فقط بطريقة إحصائية، وتعطي لنا الدالة الموجية معلومات حول احتمال أن نجد الفوتون في مكان محدد عندما نجري رصدًا أو ملاحظة لموضعه.

تحقق عديد من الباحثين، قبل ظهور ميكانيكا الكم، من أن العلاقة بين الموجة الضوئية والفوتون يجب أن تكون ذات سلوك إحصائي. على أن ما لم يتحققوا منه بوضوح هو أن الدالة الموجية تعطي معلومات حول احتمال تواجد فوتون واحد في مكان ما، وليس العدد المحتمل للفوتونات في هذا المكان. ويمكن إيضاح أهمية هذا التمايز بالطريقة الآتية: نفترض أن لدينا شعاعًا ضوئيًّا يتكون من عدد كبير من الفوتونات قد انقسم إلى مركبتين لهما شدة ضوئية متساوية. وعلى افتراض أن الشدة الضوئية لشعاع ضوئي ترتبط بالعدد المحتمل من الفوتونات فيه، لذا يكون لدينا نصف العدد

الكلي من الفوتونات موجودًا في كل مركبة. وإذا سمح لهاتين المركبتين بالتداخل فإنه يتطلب أن فوتونًا في إحدى المركبتين يكون قابلًا للتداخل مع فوتون في المركبة الأخرى. وأحيانًا يمكن أن يلاشي أحدهما الآخر، وأحيانًا أخرى يمكنهما توليد أربعة فوتونات. ولكن هذا يتناقض مع قانون ثبوت الطاقة. والنظرية الجديدة التي تربط الدالة الموجية مع احتمالات فوتون واحد، تتخطى الصعوبة بجعل كل فوتون يذهب جزئيًّا إلى كل من المركبتين. «يتداخل فوتون عند ذلك مع نفسه. ولا يمكن أن يحدث أي تداخل بين فوتونين».

لا تقتصر مصاحبة الجسيمات والموجات فقط على حالة الضوء المذكورة سابقًا ولكن وفقًا للنظرية الحديثة فإن لها صفة العموم. فكل أنواع الجسيمات مصحوبة بموجات بهذه الطريقة ومن ثم كل الحركات الموجية تكون مصحوبة بجسيمات. وعليه فإن كل الجسيمات يمكن أن يظهر لها تأثيرات تداخلية وكل الحركات الموجية تكون طاقاتها في صورة «كمات». والسبب في أن هذه الظواهر العامة لا تظهر بوضوح شديد هو قانون التناسب بين الكتلة والطاقة للجسيمات وتردد الموجات وهذا المعامل يعطي قيمًا متناهية الصغر للكمات المصاحبة لترددات الموجات المعتادة. بينما لجسيمات مثل جسيمات الضوء أو مثل الإلكترونات يكون تردد الموجة المصاحبة عاليًا جدًّا لدرجة أن التداخل لا يتحقق بسهولة.

٤- التراكب وعدم التحديد

وقد يشعر القارئ بعدم الرضا عن المحاولة في الفصلين السابقين لتوفيق وجود الفوتونات مع النظرية التقليدية للضوء. وربما يجادل بأن هناك فكرة غريبة قد قدمت إمكانية أن يكون الفوتون جزئيًّا في كل من حالتي الاستقطاب أو أن يكون في واحد من الشعاعين المنفصلين، ولكن حتى باستخدام هذه الفكرة الغريبة لم تعط صورة مقنعة للعمليات الأساسية للفوتون المفرد. ويمكن أن يقول أيضًا إن هذه الفكرة الغريبة لم تعط أية معلومات عن النتائج العملية للتجارب التي نوقشت، خلافًا لما يمكن الحصول عليه باعتبار أن الفوتونات تكون موجهة بطريقة غامضة بواسطة موجات. وما هي عندئذ الفائدة من هذه الفكرة الغريبة؟

وللإجابة عن الانتقاد الأول يمكن ملاحظة أن الموضوع الرئيسي للعلوم الطبيعية ليس التزويد بالصور ولكن وضع صيغ لقوانين تحكم الظواهر واستخدام هذه القوانين لاكتشاف ظواهر جديدة. وإذا وجدت صوره فبها ونعمت، وسواء كانت الصورة موجودة

أو غير موجودة فإن ذلك ذو أهمية ثانوية. وفي حالة الظواهر الذرية لا يتوقع وجود صورة بالمعنى المعتاد لكلمة «صورة» والتي يعنى بها نموذج يعمل أساسًا على طرق تقليدية، وعلى أية حال، ربما يستطيع المرء أن يمد معنى كلمة «صورة» ليشمل أي طريقة للنظر إلى القوانين الأساسية التي تجعل توافقها الذاتي واضحًا، وبهذا الامتداد ربما يكتسب المرء تدريجيًّا صورة للظواهر الذرية وذلك بأن يصبح معتادًا على قوانين النظرية الكمية.

بالنسبة للانتقاد الثاني يمكن ملاحظة أنه في كثير من التجارب البسيطة على الضوء فإن نظرية مبدئية تربط بين الموجات والفوتونات بطريقة إحصائية، تفتقد الدقة الصارمة؛ سوف تكون مناسبة لتفسير النتائج. وفي مثل هذه التجارب فإن ميكانيكا الكم لا تعطي معلومات إضافية. وفي معظم التجارب تكون الظروف معقدة إلى درجة كبيرة، بحيث إن مثل هذه النظرية المبدئية لا يمكن تطبيقها وتظهر الحاجة إلى مشروع أكثر تطورًا مثل ذلك المقدم من خلال نظرية الكم.

وأسلوب الوصف الذي تعطيه ميكانيكا الكم في الحالات المعقدة يصلح تطبيقه أيضًا على الحالات البسيطة، وبالرغم من أنه ليس ضروريًّا لتفسير النتائج العملية، إلا أن دراسة الحالات البسيطة تكون مقدمة مناسبة لدراسة الحالة العامة.

ويظل هناك انتقاد عام يمكن أن يوجه للمشروع كله، ألا وهو الابتعاد عن الحتمية (determinacy) في النظرية التقليدية، إذ يظهر تعقيد كبير في وصف الطبيعة، وهذا في الواقع ملمح غير مرغوب. وهذا التعقيد لا يمكن إنكاره ولكن يعوضه تبسيط هائل يقدمه المبدأ العام لتراكب الحالات general principle of superposition of states وهو ما سنتعرض له فيما يلي. على أنه من الضروري أن ندقق مفهوم الحالة state لمنظومة ذرية عامة.

دعنا نأخذ أي منظومة ذرية مكونة من جسيمات أو أجسام لها خواص محددة (الكتلة، عزم القصور الذاتي، ... إلخ) تتفاعل وفقًا لقوانين معينة للقوة، نتيجة لذلك سوف يكون هناك حركات مختلفة ممكنة للجسيمات أو الأجسام تتوافق مع قوانين القوة. أي من هذه الحركات تعرف بأنها حالة للمنظومة ووفقًا للأفكار التقليدية يمكن للمرء أن يحدد أي حالة بإعطاء قيم عددية للمركبات المختلفة لإحداثيات وسرعات الأجزاء التي تتركب منها المنظومة في لحظة ما من الزمن. وبهذا تكون الحركة الكلية قد تحددت تحديدًا تامًّا. ولكن الآن وطبقًا للمناقشة الواردة في نهاية الفصل الأول يظهر لنا أنه لا يمكننا ملاحظة منظومة صغيرة بنفس القدر من التفاصيل التي تفترضها النظرية التقليدية. وحدود قدرة الملاحظة تضع حدًّا لعدد البيانات التي يمكن

تخصيصها لحالة ما. ولهذا فالحالة لمنظومة ذرية يجب أن تعين ببيانات أقل أو غير محددة وليس بفئة متكاملة من القيم العددية لكل الإحداثيات والسرعات عند لحظة ما من الزمن. وفي حالة ما إذا كانت المنظومة هي فوتون مفرد فتعرف المنظومة تمامًا بحالة انتقالية معطاة كما هو موضح في الفصل الثالث، مع حالة استقطاب معطاة بالمعنى الموضح في الفصل الثاني.

ويمكن تعريف حالة المنظومة كحركة غير مضطربة مقيدة بالعديد من الشروط أو البيانات الممكنة نظريًّا دون تداخل أو تناقص ذاتي. وعمليًّا توضع الشروط بغرض إعداد (تحضير) مناسب للمنظومة، وربما يكون هذا الأعداد من خلال التمرير في أجهزة فرز مثل فتحات (شقوق) أو مقياس استقطاب، وتظل المنظومة غير مضطربة بعد التحضير.

ويمكن أن تستخدم كلمة حالة لتعني الحالة عند لحظة معينة (بعد التحضير) أو الحالة خلال الزمن الكلي بعد التحضير. للتمييز بين هذين المعنيين تعرف الأخيرة «بحالة الحركة» state of motion عند مظنة الالتباس.

يطبق المبدأ العام للتراكب في ميكانيكا الكم للحالات بأي من المعاني السابقة لأي منظومة ديناميكية. وهذا يتطلب منا أن نفترض وجود علاقات خاصة بين هذه الحالات بحيث إنه عندما تكون المنظومة في حالة محددة يمكننا اعتبارها جزئيًّا في حالتين أو أكثر. وعليه يجب النظر إلى الحالة الأصلية كنتيجة لنوع من التراكب لحالتين أو أكثر من الحالات الجديدة، بطريقة لا يمكن تخيلها طبقًا للأفكار التقليدية. وأية حالة يمكن اعتبارها نتيجة لتراكب حالتين أو أكثر من حالات أخرى وبالتأكيد بعدد لانهائي من الطرق. وبالتبعية أي حالتين أو أكثر تتراكب لتعطي حالة جديدة. ومنهج التعبير عن حالة ما كتراكب من الحالات الأخرى هو طريقة رياضية مسموح بها دائمًا، غير معتمدة على الرجوع إلى الشروط الفيزيائية، مثل طريقة تحليل موجة إلى مركبات «فورييه»، ومع أنها مفيدة في حالة بعينها، فإنها تعتمد على الشروط الفيزيائية للمسألة قيد الاعتبار.

في الفصلين السابقين أعطيت أمثلة لمبدأ التراكب حيث طبق على منظومة مكونة من فوتون مفرد. وتعلق الفصل الثاني بالحالات المختلفة بالنسبة للاستقطاب، وتعلق الفصل الثالث بالحالات المختلفة فقط بالنسبة لحركة الفوتون ككل.

وطبيعة العلاقات التي تتطب مبدأ التراكب أن توجد بين حالات أي منظومة من النوع الذي لا يمكن شرحه من خلال المفاهيم الفيزيائية المعتادة. فلا يستطيع المرء من خلال المعنى التقليدي تصور منظومة تكون جزئيًّا في كل من الحالتين، ثم يري تطابق

هذا مع منظومة كائنة كلية في حالة أخرى. هناك محتوى لفكرة جديدة تمامًا يتعود المرء عليها وعن طريقها يجب على المرء أن يتقدم نحو بناء نظرية رياضية مضبوطة دون امتلاك تفاصيل الصورة التقليدية.

عندما تتكون حالة من تراكب حالتين أو أكثر فسوف تحمل خواصَّ متداخلة بطريقة غامضة بين خواص الحالتين الأصليتين وتقترب من أو تبتعد عن خصائص واحدة منهما وفقًا لكبر أو صغر الوزن المرافق لهذه الحالة في عملية التراكيب. وتُعرَّف الحالة الجديدة تمامًا بالحالتين الأصليتين عندما تعرف الأوزان النسبية في عملية التراكب مع فرق طور معين، والمعنى الدقيق للأوزان والأطوار تعينه النظرية الرياضية في الحالة العامة. ومعنى الأوزان والأطوار في حالة استقطاب فوتون يتعين من البصريات التقليدية، بحيث، مثلًا، عندما تتراكب حالتان متعامدتا الاستقطاب بأوزان متساوية فربما تكون الحالة الجديدة مستقطبة دائريًّا في أي من الاتجاهين، أو مستقطبة خطيًّا بزاوية $\frac{1}{4}\pi$ أو مستقطبة ناقصيًّا، وفقًا لفرق الطور.

وتظهر بوضوح الطبيعة غير التقليدية لعملية التراكب إذا وضعنا في اعتبارنا تراكب حالتين A, B، بحيث توجد عملية رصد، عندما تجرى والنظام في حالة A فسوف تعطي قيمة معينة ولتكن a مثلًا، وعندما تجرى والنظام في حالة B فسوف تعطي قيمة مختلفة ولتكن b مثلًا. السؤال هو: ما هي النتيجة عندما يجري الرصد والنظام في حالة التراكب؟ والإجابة تكون أن النتيجة ستكون أحيانًا a وأحيانًا أخرى b وفقًا لقوانين الاحتمالات، اعتمادًا على أوزان كل من A, B في عملية التراكب. لن تختلف أبدًا عن a أو b. **(إن السلوك البيني للحالات المتكونة بالتراكب يعبر عن نفسه من خلال احتمال نتيجة معينة لرصد يكون بينيًّا بين الاحتمالات المناظرة للحالة الأصلية* وليس من خلال أن النتيجة نفسها تكون بينية بين النتائج المناظرة للحالات الأصلية).**

وبهذه الطريقة نرى أن التخلي الحاد عن الأفكار العادية — كافتراض علاقات التراكب بين الحالات — ممكن فقط باعتبار الاعتراف بأهمية الاضطراب المصاحب لعملية الرصد وعدم التحديد المترتب على نتائج الرصد. وعندما يجري رصد على أي منظومة ذرية في حالة عامة معطاة فإن النتيجة لن تكون قطعية، بمعنى أنه إذا أجريت التجربة عدة مرات تحت نفس الظروف فيمكن الحصول على نتائج مختلفة. إنه قانون الطبيعة، ومع ذلك إذا كُررت التجربة عددًا كبيرًا من المرات فسوف نحصل على كل نتيجة خاصة بنسب

*احتمال نتيجة خاصة للحالة الناتجة عن التراكب لا تقع دائمًا متوسطة بين النتائج للحالات الأصلية في الحالة العامة التي تكون فيها الحالات الأصلية ليست صفرًا أو الواحد الصحيح، ومن ثم فإن هناك تحفظات على «البينية» Intermediateness للحالة الناتجة بالتراكب.

محددة من العدد الكلي لمرات الرصد، ولذا فهناك احتمال محدد للحصول على هذه النتيجة. وهذا الاحتمال هو ما تنطلق النظرية لحسابه فقط في بعض الحالات الخاصة عندما يكون احتمال نتيجة معينة مساويًا الواحد الصحيح تكون النتيجة محددة (قطعية).

يؤدي افتراض علاقات التراكب إلى نظرية رياضية تكون فيها المعادلات التي تُعرّف الحالة خطية في المجاهيل، وبناءً على هذا حاول أُناس بناء منظومات مشابهة مع منظومات في الميكانيكا التقليدية، مثل الأوتار أو الاغشية المتذبذبة والمحكومة بمعادلات خطية حيث يسري مبدأ التراكب عليها. وأدي هذا التناظر إلى ظهور اسم «الميكانيكا الموجية» ليُعطي أحيانًا «لميكانيكا الكم». ومن المهم أن نتذكر أن التراكب الذي يحدث في ميكانيكا الكم له طبيعة جوهرية مختلفة عن أي تراكب يحدث في النظرية التقليدية. كما هو واضح من حقيقة أن مبدأ التراكب الكمي يتطلب عدم التحديد في نتائج الرصد من أجل القدرة على تفسير فيزيائي مقبول. وعليه فإن التناظر قد يكون خادعًا.

٥- الصياغة الرياضية للمبدأ

لقد حدث تغير عميق خلال القرن الحالي (الماضي) في آراء الفيزيائيين التي اعتنقوها عن الأسس الرياضية لموضوعهم. لقد افترضوا سابقًا أن مبادئ ميكانيكا نيوتن تقدم الأساس لوصف كل الظواهر الفيزيائية وأن ما على الفيزيائي النظري عمله هو أن يطور ويطبق هذه المبادئ. مع الاعتراف بأنه لا يوجد سبب منطقي يجعل مبادئ نيوتن والمبادئ التقليدية صالحة خارج نطاق تحقيقها تجريبيًّا، وأصبح إدراك التخلي عن الأفكار التقليدية ضرورة واجبة. هذا التخلي تم التعبير عنه من خلال تقديم صياغة رياضية جديدة ومجموعة بديهيات جديدة وقواعد للمعالجة أدخلت إلى طرق الفيزياء النظرية. تزودنا ميكانيكا الكم بمثال جيد للأفكار الجديدة حيث وجب ربط حالات منظومة ديناميكية بالمتغيرات الديناميكية بطرق غريبة تمامًا تستعصي على الفهم من وجهة النظر التقليدية. ويتطلب تمثيل الحالات والمتغيرات الديناميكية كميات رياضية ذات طبيعة مختلفة عما هو مستخدم عادة في الفيزياء. والمشروع الجديد يصبح نظرية فيزيائية دقيقة عندما تكون كل البديهيات والقواعد العملية التي تحكم الكميات الرياضية محددة، بالإضافة إلى طرح قوانين معينة تربط الحقائق الفيزيائية بالصياغة الرياضية بحيث إنه يمكن استخلاص معادلات بين شروط فيزيائية معطاة وكميات رياضية، والعكس بالعكس، وفي أي تطبيق للنظرية يمكن للمرء أن يعطي معلومات فيزيائية معينة ويود أن يشرع في التعبير عنها بواسطة معادلات بين كميات رياضية.

وعندئذ يود المرء استنتاج معادلات جديدة بمساعدة البديهيات والقواعد العملية ثم يود أن يختم بتفسير هذه المعادلات الجديدة كشروط فيزيائية. تعتمد تزكية المشروع، بعيدًا عن التوافق الداخلي، على اتفاق النتائج النهائية مع التجربة.

سوف نبدأ ببناء المشروع بمعالجة العلاقات الرياضية بين حالات منظومة ديناميكية عند لحظة زمنية. وهذه العلاقات سوف تأتي من الصيغة الرياضية لمبدأ التراكب. وعملية التراكب هي نوع من عمليات الإضافة وتؤدي إلى أنه يمكن إضافة الحالات بطريقة ما لتنتج حالات جديدة. وبناء على ذلك يجب أن ترتبط الحالات بكميات رياضية من النوع الذي يمكن جمع عدد منها ليعطي كميات أخرى من نفس النوع. وأوضح أمثلة لهذه الكميات هي المتجهات. والمتجهات المعتادة الموجودة في فراغ في أبعاد محدودة ليست كافية عمومًا لمعظم المنظومات الديناميكية في ميكانيكا الكم. ويجب علينا أن نلجأ إلى التعميم لمتجهات في فراغ ذي أبعاد لانهائية، وتتعقد المعالجة الرياضية بظهور أمثلة لمسألة التقارب. وحاليًّا سوف نتناول فقط بعض خواص المتجهات العامة وهي الخواص التي يمكن استنتاجها على أساس مشروع بسيط من البديهيات، بينما لا نتعرض لمسائل التقارب والموضوعات المرتبطة بها حتى تظهر الحاجة لذلك.

من المستحسن أن يكون لدينا اسمًا خاصًّا لوصف المتجهات التي ترتبط بحالات منظومة ما في ميكانيكا الكم، سواء كانت هذه المتجهات في فراغ عدد أبعاده محدود أو لانهائي الأبعاد سوف نسميها بمتجهات ket.* أو ببساطة كيتات kets (المتجهات اليمنى) ونعبر عن متجه عام لواحد منها برمز خاص $\rangle|$. وإذا أردنا أن نميز واحدًا منها بعلامة A مثلًا نضعه في المنتصف هكذا $|A\rangle$.

وسوف تتضح مناسبة هذا الترميز عند تطوير المشروع ويمكن أن يُضرب متجه أيمن (ket) في عدد مركب ويمكن أن تجمع المتجهات اليمنى (kets) مع بعضها لتعطي متجهات يمنى أخرى. فمثلًا من المتجهين الأيمنين ket $|A\rangle, |B\rangle$ يمكننا أن نكون

$$c_1|A\rangle + c_2|B\rangle = |R\rangle, \tag{1}$$

حيث c_1, c_2 عددان مركبان. ويمكن أيضًا أن نجري على المتجهات اليمنى عمليات خطية عامة مثل إضافة عدد لانهائي منها. وإذا كان لدينا متجه أيمن $|x\rangle$ معتمدًا على بارامتر

*يلاحظ أن ket هي المقطع الأخير من كلمة BRACKET التي تعني «قوسًا» وسيتخذ المقطع الأول للمرافق كما سيتضح فيما بعد، ويرمز للقوس بالرمز $\langle\rangle$ وعليه أخذت $\langle|$ لتمثل ket، $|\rangle$ لتمثل bra. وسنعتمد فيما يلي كلمة «متجه أيمن» لتعبر عن ket و«متجه أيسر» لتعبر عن bra.

x يمكن أن يأخذ كل القيم في مدى معين فيمكن أن نجري التكامل بالنسبة للبارامتر x وللحصول على متجه أيمن (ket) آخر هو:

$$\int |x\rangle dx = |Q\rangle$$

المتجه الأيمن والمعبر عنه خطيًّا بدلالة متجهات يمنى أخرى معينة يقال إنه معتمد عليها. وتسمى فئة المتجهات مستقلة خطيًّا إذا لم يكن من الممكن التعبير خطيًّا عن أي واحد منها بدلالة باقي الفئة.

والآن نفترض أن كل حالة لمنظومة ديناميكية عند لحظة معينة تناظر متجهًا أيمن، والتناظر يكون بحيث إذا نتجت حالة من تراكب حالات أخرى معينة يكون المتجه الأيمن المناظر لها معبرًا عنه خطيًّا بدلالة المتجهات اليمنى للحالات الأخرى وبالعكس. وهكذا فإن الحالة R تنتج من تراكب الحالتين A, B عندما تكون المتجهات اليمنى المناظرة مرتبطة بالمعادلة (1).

يؤدي الافتراض السابق إلى خواص معينة لعملية التراكب، تلك الخواص في الحقيقة ضرورية لتكون كلمة «تراكب» ملائمةً. وعندما تتراكب حالتان أو أكثر فالترتيب في عملية التراكب ليس مهمًّا، ولذا فإن عملية التراكب تكون متماثلة بين الحالات المتراكبة. ومرة أخرى من معادلة (1) إنه (باستثناء الحالة عندما يتلاشى أي من c_1 أو c_2) يمكن تكوين الحالة R بتراكب حالتي A, B، ومن ثم فإن الحالة A يمكن أن تتكون من تراكب B, R، وكذلك يمكن تكوين B من تراكب A, R. وعلاقة التراكب تكون متماثلة بين الحالات الثلاث A, B, R.

يقال للحالة التي تنتج من تراكب حالات أخرى معينة إنها معتمدة على هذه الحالات. ولمزيد من التعميم سيقال إن حالة ما معتمدة على فئة من الحالات محدودة أو لانهائية العدد إذا كان المتجه الأيمن المناظر لهذه الحالة معتمدًا على المتجهات اليمنى المناظرة لفئة الحالات، ويقال لمجموعة الحالات إنها مستقلة إذا لم تكن أي حالة منها معتمدة على باقي الحالات.

وحتى نستطيع أن نتقدم بالصيغ الرياضية لمبدأ التراكب يجب أن نتزود بافتراض إضافي وهو أنه بتراكب حالة ما مع نفسها فلا يمكن أن نحصل على حالة جديدة ولكن نسترجع الحالة الأصلية مرة أخري. فإذا كانت الحالة الأصلية تناظر متجهًا أيمن $|A\rangle$ فعندما تتراكب مع نفسها فالحالة الناتجة سوف تناظر

$$c_1|A\rangle + c_2|A\rangle = (c_1 + c_2)|A\rangle,$$

حيث c_1, c_2 أعداد. والآن قد يكون لدينا $c_1 + c_2 = 0$ وفي هذه الحالة تكون نتيجة عملية التراكب لا شيء. فقد لاشت المركبات بعضها البعض بتأثير التداخل. ويستدعي افتراضنا الجديد أنه بعيدًا عن هذه الحالة الخاصة، فإن الحالة الناتجة يجب أن تكون نفس الحالة الأصلية وبحيث إن $(c_1 + c_2)|A\rangle$ يجب أن تناظر الحالة نفسها $|A\rangle$ والآن $c_1 + c_2$ ما هو إلا عدد مركب اختياري، ومن ثم يمكننا استنتاج أنه إذا ضرب المتجه الأيمن المناظر لحالة ما في أي عدد مركب غير مساوي للصفر، فإن المتجه الناتج يناظر الحالة نفسها (الحالة الأصلية). ومن ثم فإن أي حالة تتميز باتجاه المتجه الأيمن بينما أي طول يحدده المرء للمتجه الأيمن يكون غير ذى أهمية. وكل حالات المنظومة الديناميكية تكون في تناظر واحد لواحد مع كل الاتجاهات الممكنة للمتجهات اليمنى ولا يمكن التفريق بين اتجاهي المتجهين اليمينين $|A\rangle$ و$-|A\rangle$.

يُظهر الافتراض الذي سبق ذكره بوضوح جلي الاختلاف الأساسي بين التراكب في نظرية الكم وأي نوع من التراكب الكلاسيكي. وفي حالة المنظومات الكلاسيكية التي يستقيم فيها مبدأ التراكب فعندما يتم تراكب حالة ما مع نفسها، بالنسبة لغشاء متذبذب مثلًا، فإن النتيجة هي حالة مختلفة بسعات ذبذبات مختلفة. ليس هناك خصائص فيزيائية مميزة تتميز كيفيًّا، للحالة الكمية المناظرة لقيم الترددات الكلاسيكية الموصوفة بنسب السعات عند نقط مختلفة من الغشاء. مرة أخرى نكرر، بينما توجد حالة كلاسيكية بسعة ذبذبات مساوية للصفر في كل مكان، هي حالة السكون؛ فإنه لا توجد حالة مناظرة لهذه المنظومة الكمية، حيث إن المتجه الأيمن الصفري لا يناظر أي حالة على الإطلاق.

إذا أعطينا حالتين مناظرتين لمتجهين أيمنين $|A\rangle, |B\rangle$ والحالة العامة المتولدة من تراكبهما تناظر متجهًا أيمن $|R\rangle$ والذي يتحدد بعددين مركبين هما العاملين c_1, c_2 في معادلة (1)، إذا ضرب هذان العاملان في عامل واحد (هو نفسه عدد مركب) فإن المتجه الأيمن $|R\rangle$ سوف يضرب في هذا العامل بينما لا تتغير الحالة المناظرة. ولذا فإن النسبة بين هذين العاملين هي المؤثرة في تحديد الحالة R. وعليه فإن الحالة تعرف بعدد مركب واحد أو ببارامترين حقيقيين. وبذلك فمن حالتين معطاتين يمكن الحصول على عدد لانهائي من الدرجة الثانية من الحالات من خلال التراكب. أي يمكن الحصول على عدد لانهائي ثنائي الطيات two-fold infinity (∞^2) من الحالات عن طريق التراكب.

قد تأكدت هذه النتيجة بالأمثلة التي تمت مناقشتها في الفصلين الثاني والثالث. وفي المثال المذكور في الفصل الثاني يوجد حالتا استقطاب مستقلتان للفوتون، يمكن أخذهما على أنهما حالتا الاستقطاب الموازية والمتعامدة على اتجاه ثابت. ومن تراكب هاتين

الحالتين يمكن الحصول على عدد لانهائي ثنائي الطيات، يعني كل حالات الاستقطاب الناقصية. وتحتاج الحالة العامة لوصفها إلى عاملين. نذكر مرة أخرى المثال في الفصل الثالث، من تراكب حالتين انتقاليتين لفوتون يمكن الحصول على عدد لانهائي ثنائي الطيات من الحالات الانتقالية، توصف حالتها العامة بعاملين، وهذان العاملان يمكن اعتبارهما النسبة بين سعتي الدالتين الموجيتين المضافتين وعلاقة الطور بينهما. هذا التأكيد يُظهر بجلاء الحاجة إلى استخدام عوامل مركبة في المعادلة (1). وإذا اقتصرت هذه العوامل على الأعداد الحقيقية، وحيث إن النسبة بين العاملين هي المهمة في تحديد اتجاه المتجه المحصلة $\langle R|$ عندما تعطي $\langle A|,\langle B|$ فسوف يتم الحصول على حالات عددها لانهائي بسيط فقط (∞) عن طريقة التراكب.

٦- المتجهات اليمنى kets واليسرى bras

عندما يكون لدينا مجموعة من المتجهات في أي نظرية رياضية، فنستطيع دائمًا أن نكون مجموعة ثانية من المتجهات يسميها الرياضيون المتجهات الثنائية dual وسنضيف الأسلوب عندما تكون متجهاتنا الأصلية هي المتجهات اليمنى.

لنفترض أن لدينا عددًا ϕ دالة في المتجه الأيمن $\langle A|$، بمعنى لكل متجه $\langle A|$ يوجد عدد واحد ϕ، ولنفترض أيضًا أن الدالة خطية، وهذا يعني أن العدد المناظر للمتجه $\langle A'| + \langle A|$ هو مجموع العددين المناظرين للمتجهين $\langle A|$ و$\langle A'|$، وأن العدد المناظر للمتجه $c|A\rangle$ هو c من المرات للعدد المناظر للمتجه $\langle A|$ حيث c أي عامل عددي. حينئذ فإن العدد ϕ المناظر لأي متجهه $\langle A|$ يمكن النظر إليه كحاصل ضرب قياسي للمتجه $\langle A|$ مع متجه آخر جديد، بحيث يظهر أحد هذه المتجهات الجديدة مناظرًا لكل دالة خطية من المتجهات اليمنى $\langle A|$. وتأييدًا لطريقة النظر هذه إلى العدد ϕ كما سنرى لاحقًا، (انظر معادلتي (5) و(6))؛ فإنه يمكن جمع المتجهات الجديدة معًا أو ضربها في عدد لتعطي متجهات أخرى من نفس النوع. وبالطبع تكون المتجهات الجديدة معرفة فقط في حدود أن حاصل ضربها القياسي مع المتجه الأيمن الأصلي هو عبارة عن أعداد معطاة، وأن هذا كافٍ لبناء نظرية رياضية لهذه المتجهات الجديدة.

وسنطلق على المتجهات الجديدة اسم المتجهات اليسرى bra أو ببساطة bras وسنشير إلى متجه عام منها بالرمز $|\rangle$ صورة المرآة للمتجه الأيمن ket وإذا أردنا أن نميز متجهًا معينًا منها بالرمز B مثلًا فنكتبها في الوسط هكذا $\langle B|$. ويكون حاصل

الضرب القياسي لمتجه البرا $\langle B|$ bra والمتجه الأيمن $|A\rangle$ هو $\langle B|A\rangle$ بمعنى أن تركيب الرمزين للمتجهين الأيسر bra والأيمن ket بحيث يكون المتجه الأيسر bra على اليسار والمتجه الأيمن ket على اليمين وأن نختصر الخطين الرأسيين إلى خط واحد.

قد ينظر المرء إلى ⟨ و⟩ كنوع خاص مميز من الأقواس. ويظهر الآن حاصل الضرب القياسي $\langle B|A\rangle$ كقوس كامل، أما المتجه الأيسر $\langle B|$ أو المتجه الأيمن $|A\rangle$ فيظهران كأقواس غير كاملة، ولدينا القواعد الآتية: أي تعبير في صورة قوس كامل يمثل عددًا، بينما أي تعبير في صورة قوس ناقص يمثل متجهات من نوع «يسرى» أو «يمنى» طبقًا لاحتوائها على الجزء الأيسر أو الجزء الأيمن من الأقواس.

ويمكن التعبير رمزًا عن شرط كون حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\langle B|$ و$|A\rangle$ دالة خطية في $|A\rangle$ كما يلي:

$$\langle B|\{|A\rangle + |A'\rangle\} = \langle B|A\rangle + \langle B|A'\rangle, \qquad (2)$$

$$\langle B|\{c|A\rangle\} = c\langle B|A\rangle, \qquad (3)$$

حيث c أي عدد.

ويعتبر المتجه الأيسر (bra) معرفًا تعريفًا تامًّا عندما يُعطى حاصل ضربه القياسي مع أي متجه أيمن، بحيث إذا كان للمتجه الأيسر حاصل ضرب متلاشٍ مع كل متجه أيمن فإن المتجه الأيسر نفسه يكون متلاشيًا والصورة الرمزية لذلك هي: إذا كان

$$\begin{gathered}\langle P|A\rangle = 0, \quad \text{all } |A\rangle, \\ \text{then } \langle P| = 0.\end{gathered} \qquad (4)$$

ويكون مجموع المتجهين الأيسرين $\langle B|, \langle B'|$ معرفًا بشرط أن يكون حاصل ضربه القياسي مع أي متجه أيمن $|A\rangle$ هو مجموع حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\langle B|, \langle B'|$ مع $|A\rangle$ أي:

$$\{\langle B| + \langle B'|\}|A\rangle = \langle B|A\rangle + \langle B'|A\rangle, \qquad (5)$$

كذلك يعرف حاصل ضرب متجه أيسر $\langle B|$ مع عدد c بشرط أن يكون حاصل الضرب القياسي مع المتجه الأيمن $|A\rangle$ هو c من المرات من حاصل الضرب القياسي للمتجه $\langle B|$ مع المتجه $|A\rangle$ أي:

$$\{c\langle B|\}|A\rangle = c\langle B|A\rangle. \qquad (6)$$

وتظهر المعادلتان (2) و(5) أن ضرب متجهات يسرى أو يمنى يتبع قاعدة التوزيع على الضرب، أما المعادلتان (3) و(6) فتوضحان أن الضرب في عامل عددي يتبع قواعد الجبر العادية.

والمتجهات اليسرى كما تم تقديمها هنا نوع مختلف تمامًا عن المتجهات اليمنى وليس هناك أي علاقة بينهما عدا وجود الضرب القياسي للمتجه الأيسر مع المتجه الأيمن، وسوف نفترض الآن أن هناك تناظر واحدٍ لواحد بين المتجهات اليسرى والمتجهات اليمنى، بحيث إن المتجه الأيسر المناظر للمتجه $|A\rangle+|A'\rangle$ هو مجموع المتجهين الأيسرين المناظرين لكل من $|A\rangle, |A'\rangle$ وأن المتجه الأيسر المناظر للمتجه $c|A\rangle$ يكون $\overline{c}$ من المرات من المتجه الأيسر المناظر للمتجه $|A\rangle$ حيث $\overline{c}$ هو العدد المرافق للعدد c. سوف نستخدم نفس الرمز لتعيين المتجه الأيمن والمتجه الأيسر المناظر له وبذلك يكون المتجه الأيسر المناظر للمتجه $|A\rangle$ هو $\langle A|$.

والعلاقة بين المتجه الأيمن والمتجه الأيسر المناظر له تجعل من المعقول أن نطلق على أحدهما المرافق التخيلي للآخر. ومتجهاتنا سواء اليسرى أو اليمنى هي كميات مركبة حيث يمكن ضربهما في أعداد مركبة، ولذا فإن لها نفس الطبيعة كما سبق، ولكنها كميات مركبة من نوع خاص لا يمكن أن تنفصل إلى جزء حقيقي وجزء تخيلي. والطريقة المعتادة للحصول على الجزء الحقيقي لكمية مركبة هي إيجاد نصف مجموع الكمية نفسها مع الكمية المرافقة لها، لا يمكن تطبيقها، إذ لا يمكن إيجاد حاصل جمع متجه أيسر مع متجه أيمن، حيث إنهما ذوا طبيعة مختلفة. وللتنبيه إلى هذا التمايز سوف نستخدم كلمة المرافق المركب complex conjugate للإشارة إلى الأعداد والكميات المركبة الأخرى التي يمكن فصلها إلى أجزاء حقيقية وتخيلية، وكلمة المرافق التخيلي imaginary conjugate للمتجهات اليسرى واليمنى التي لا يمكن فصلها. وبالنسبة للنوع الأول من الكميات نستخدم إشارة بوضع خط أعلى الكمية للحصول على المرافق المركب لها.

ووفقا للتناظر واحد لواحد بين المتجهات اليسرى والمتجهات اليمنى فأي حالة لمنظومة ديناميكية في لحظة ما يمكن تمييزها باتجاه متجه أيسر تمامًا مثلما يمكن تمييزها باتجاه لمتجه أيمن. وفي الحقيقة فإن النظرية تكون متماثلة في أساسياتها بين المتجهات اليسرى والمتجهات اليمنى.

إذا أعطينا متجهين من المتجهات اليمنى $|A\rangle, |B\rangle$ يمكن أن نكون منهما عدد $\langle B|A\rangle$ بأخذ حاصل الضرب القياسي للمتجه $|A\rangle$ الأول مع المرافق التخيلي للثاني. ويعتمد هذا العدد خطيًّا على $|A\rangle$ وعكس خطي على $|B\rangle$. ومعنى الاعتماد عكس الخطي

أن العدد المكون من $\langle B'| + \langle B|$ هو مجموع الأعداد المكونة من $\langle B|$ ومن $\langle B'|$ وأن العدد الناتج من $c\langle B|$ يكون مكررًا $\bar{c}$ من مرات العدد المكون من $\langle B|$. هناك طريقة أخري يمكننا عن طريقها الحصول على عدد يكون خطيًّا في $\langle A|$ وعكس الخطي في $\langle B|$ وذلك بتكوين حاصل الضرب القياسي من المتجه الأيمن $\langle B|$ مع المرافق التخيلي للمتجه $\langle A|$ ثم نأخذ المرافق المركب لهذا الضرب القياسي. وسوف «نفترض أن هذين العددين دائمًا متساويان» أي أن:

$$\langle B|A\rangle = \overline{\langle A|B\rangle}. \tag{7}$$

وإذا وضعنا $\langle A| = \langle B|$ فنجد أن $\langle A|A\rangle$ يجب أن تكون عددًا حقيقيًّا. وسوف نضيف فرضًا آخر هو

$$\langle A|A\rangle > 0, \tag{8}$$

إلا عندما تكون $\langle A| = 0$.

في الفراغ المعتاد يكون حاصل الضرب القياسي لأي متجهين عبارة عن عدد حقيقي ويكون متماثلًا بينهما. وبالمثل في فراغ المتجهات اليسرى أو فراغ المتجهات اليمنى نستطيع أيضًا أن نكون عددًا من أي متجهين، وهو حاصل الضرب القياسي بضرب متجه مع المرافق التخيلي للآخر، ولكنه عدد مركب ويتحول إلى العدد المرافق المركب عندما يتم تبادل المتجهين. وهناك عندئذ نوع من التعامد في هذه الفراغات، وهو تعميم للتعامد في الفراغ العادي. وسنطلق على متجه أيسر ومتجه أيمن أنهما متعامدان إذا كان حاصل ضربهما القياسي صفرًا، وأن متجهين من المتجهات اليسرى ومتجهين من المتجهات اليمنى متعامدان إذا كان حاصل ضرب أحدهما مع المرافق التخيلي للآخر مساويًا للصفر. وبالإضافة إلى هذا يمكننا القول إن حالتين لمنظومتنا الديناميكية متعامدتان إذا كانت المتجهات المناظرة لهاتين الحالتين متعامدة.

يعرف طول متجه أيسر $|A\rangle$ أو المرافق التخيلي للمتجه الأيمن $\langle A|$ بأنه يساوي الجذر التربيعي للعدد الموجب $\langle A|A\rangle$. عندما نُعطى حالة ونريد أن نكون متجهًا أيسر أو أيمن مناظرًا لها فهذا يعطي فقط اتجاه المتجه بينما تكون قيمة المتجه نفسه غير محددة في حدود عامل عدد اختياري. ومن المناسب أن نختار هذا العامل العددي بحيث يكون طول المتجه هو الوحدة. ويسمي هذا الأسلوب بالتسوية normalization، والمتجه المختار يعرف بالعياري أو المسوى normalized. ومع ذلك فإن هذا المتجه غير محدد تحديدًا تامًّا، حيث يمكن أن يضرب في أي عدد معياره الواحد الصحيح، أي: عدد ما

على الصورة $e^{i\gamma}$ حيث γ عدد حقيقي، دون أن يغير ذلك من طول المتجه. سنطلق على العدد $e^{i\gamma}$ عامل الطور Phase factor.

والافتراضات السالفة الذكر تعطي خطة متكاملة (مشروعًا متكاملًا) لعلاقات بين حالات منظومة ديناميكية عند لحظة معينة. وتظهر العلاقات في صور رياضية ولكنها تستوجب شروطًا فيزيائية تؤدي إلى نتائج يعبر عنها بدلالة القياسات عندما تتطور النظرية أكثر. فمثلًا إذا تعامدت حالتان فهذا يعني حاليًّا ببساطة معادلة في صياغتنا، ولكن هذه المعادلة تستوجب علاقة فيزيائية محددة بين الحالات، سيمكننا تطوير النظرية لاحقًا بتفسيرها من خلال النتائج المقيسة (انظر الفقرة الرابعة من الفصل العاشر).

الفصل الثاني

المتغيرات الديناميكية والمرصودات (الكميات القابلة للرصد)

٧- المؤثرات الخطية

في الفصل السابق وضعنا في اعتبارنا عددًا هو عبارة عن دالة خطية في المتجهات اليمنى، وأدى هذا إلى مفهوم المتجهات اليسرى. وسنضع في اعتبارنا الآن متجهًا أيمن عبارة عن دالة خطية في متجه أيمن مما سيؤدي إلى مفهوم المؤثر الخطي.

لنفترض أن لدينا متجها $|F\rangle$ وهو دالة في المتجه $|A\rangle$ بمعنى أنه لكل متجه أيمن $|A\rangle$ يوجد متجه مناظر له هو $|F\rangle$، ونفترض أيضًا أن الدالة خطية مما يعني أن المتجه الذي يناظر $|A\rangle + |A'\rangle$ وهو مجموع المتجهات $|F\rangle$'s المناظرة للمتجهين $|A\rangle, |A'\rangle$، وأن $|F\rangle$ المناظر للمتجه $c|A\rangle$ وهو حاصل ضرب c من المرات في المتجه $|F\rangle$ المناظر للمتجه $|A\rangle$ حيث c عامل عددي. وتحت هذه الشروط يمكن النظر إلى الانتقال من $|A\rangle$ إلى $|F\rangle$ كتطبيق لمؤثر خطي على $|A\rangle$، وإذا رمزنا للمؤثر الخطي بالرمز α، يمكن أن نكتب:

$$|F\rangle = \alpha|A\rangle,$$

التي تكتب فيها نتيجة تأثير α على $|A\rangle$ مثل حاصل ضرب α في $|A\rangle$، ونضع القاعدة بأن في مثل حواصل الضرب هذه يكون المتجه الأيمن على يمين المؤثر الخطي. ويمكننا الآن التعبير عن الشروط الخطية السابقة بالمعادلات:

$$\begin{aligned} \alpha\{|A\rangle + |A'\rangle\} &= \alpha|A\rangle + \alpha|A'\rangle, \\ \alpha\{c|A\rangle\} &= c\alpha|A\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

ويعتبر المؤثر الخطي معرفًا تعريفًا تامًّا إذا علمت نتائج تطبيقه على كل المتجهات اليمنى. وعليه يعتبر المؤثر الخطي صفريًّا إذا كانت كل نتائج تأثيره على كل المتجهات

متلاشية، كما يعتبر مؤثران خطيان متساويين إذا تساوت نتائج تأثيرهما على كل متجه يميني.

يمكن جمع المؤثرات الخطية بعضها مع بعض، فيعرف مجموع مؤثرين خطيين على أنه المؤثر الخطي الذي إذا أثر على أي متجه أيمن أعطي مجموع نواتج تأثير كل مؤثر على حدة على نفس المتجه، وعليه فإن لكل متجه $|A\rangle$، يعرف المؤثر الخطي $\alpha + \beta$ على أنه:

$$\{\alpha + \beta\}|A\rangle = \alpha|A\rangle + \beta|A\rangle \tag{2}$$

لأي $|A\rangle$. المعادلة (2) مع المعادلة الأولى من (1) تبين أن حواصل ضرب المؤثرات الخطية في المتجهات اليمنى تحقق قاعدة التوزيع على الضرب.

كما يمكن أيضًا ضرب المؤثرات الخطية مع بعضها البعض، وتعرف محصلة ضرب مؤثرين خطيين بأنها المؤثر الخطي الذي يعطي عند تطبيقه على أي متجه أيمن نفس النتيجة التي يعطيها تطبيق المؤثرين بالتتابع. وعليه يعرف حاصل الضرب $\alpha\beta$ بالمؤثر الخطي الذي عند التأثير به على أي متجه أيمن $|A\rangle$، يغيره إلى المتجه الأيمن الذي يحصل عليه المرء إذا أثر أولًا بالمؤثر β على $|A\rangle$ ثم أثر بعد ذلك على نتيجة العملية الأولي بالمؤثر α. وباستخدام الرموز

$$\{\alpha\beta\}\,|A\rangle = \alpha\,\{\beta|A\rangle\}\,.$$

يبدو هذا التعريف كمسلمة الدمج على الضرب لحاصل الضرب الثلاثي $\alpha, \beta, |A\rangle$ حيث يسمح لنا بكتابة هذا الضرب الثلاثي بالصورة $\alpha\beta|A\rangle$ بدون أقواس. وعمومًا على أي حال، فإن حاصل الضرب الثلاثي هذا ليس نفس الناتج إذا أثرنا على $|A\rangle$ أولًا بالمؤثر α ثم بالمؤثر β، بمعنى أن $\alpha\beta|A\rangle$ يكون عمومًا مختلفًا عن $\beta\alpha|A\rangle$. وعليه فعمومًا $\alpha\beta$ يجب أن تختلف عن $\beta\alpha$. «مسلمة التبديل لحاصل الضرب لا تسري على المؤثرات الخطية». ربما يحدث كحالة خاصة عندما يكون لدينا المؤثران الخطيان ξ وη حيث يكون المؤثر $\xi\eta$ مساويًا للمؤثر $\eta\xi$. وفي هذه الحالة نقول إن المؤثر ξ يقبل التبادل مع المؤثر η أو إن المؤثرين ξ وη تبادليان.

بالتطبيق المتكرر للعمليات السابقة من إضافة وضرب المؤثرات الخطية يمكن للمرء أن يكون مجاميع وحواصل ضرب لأكثر من اثنين من هذه المؤثرات، ويمكن للمرء أن يتقدم لبناء جبر لهذه المؤثرات. في هذا الجبر، لا تسري مسلمة الإبدال في الضرب، كما أن محصلة مؤثرين خطيين ربما تتلاشى بدون تلاشي أي من العاملين.

ولكن بقية مسلمات الجبر المعتاد متضمنة مسلمة الدمج والتوزيع للضرب تكون سارية كما يمكن إثبات ذلك بسهولة.

اذا أخذنا عددًا ما k، وضربناه في متجهات يمنى فسيظهر كمؤثر خطي يؤثر على متجهات يمنى، والشروط في (1) تكون مستوفاة إذا عوضنا k بدلًا من α، وبذلك فإن العدد يعتبر حالة خاصة من المؤثرات الخطية، كما أن له خاصية التبادل مع كل المؤثرات الخطية، وهذه الخاصية تميزه عن المؤثرات الخطية العامة.

حتى الآن، وضعنا في اعتبارنا المؤثرات الخطية التي تؤثر فقط على المتجهات اليمنى، ويمكننا أيضًا إعطاء معنى لتأثيرها على المتجهات اليسرى (bra) بالطريقة التالية: خذ حاصل الضرب القياسي لأي متجه أيسر $\langle B|$ مع المتجه الأيمن $\alpha|A\rangle$. يكون حاصل الضرب هذا عددًا يعتمد خطيًّا على $|A\rangle$، ومن ثم، ومن تعريف المتجهات اليسرى يمكن اعتباره حاصل ضرب قياسي للمتجه الأيمن $|A\rangle$ مع متجه أيسر ما، وعليه فالمتجه الأيسر المعرف توًّا يعتمد خطيًّا على $\langle B|$، وبذا يمكن أن ننظر إليه كنتيجة تطبيق مؤثر خطي ما على $\langle B|$. ويعين هذا المؤثر الخطي بطريقة وحيدة عن طريق المؤثر الخطي الأصلي α وربما يكون مقبولًا عقلًا أن نسمي نفس المؤثر الخطي المؤثر على المتجه الأيسر. وبهذه الطريقة يمكن جعل مؤثراتنا الخطية قادرة على التأثير على المتجهات اليسرى.

وكرمز مناسب يمكن استخدامه للمتجه الأيسر الناتج عندما تؤثر α على المتجه الأيسر $\langle B|$ هو $\langle B|\alpha$، باستخدام هذا الترميز تكون المعادلة التي تعرف $\langle B|\alpha$ هي:

$$\{\langle B|\alpha\}\,|A\rangle = \langle B|\,\{\alpha|A\rangle\} \qquad (3)$$

لأي $|A\rangle$، والتي تعبر ببساطه عن مسلمة الدمج لحاصل الضرب الثلاثي $\langle B|, \alpha, |A\rangle$. ومن ثم نضع القاعدة العامة: في مسألة حاصل ضرب متجه أيسر ومؤثر خطي يجب أن يوضع المتجه الأيسر دائمًا على اليسار. ويمكننا الآن كتابة حاصل الضرب الثلاثي لكل من $\langle B|, \alpha, |A\rangle$ ببساطة في الصورة $\langle B|\alpha|A\rangle$ بدون أقواس. يمكن التحقق ببساطة من أن مسلمة التوزيع على الضرب تسري على حاصل ضرب المتجهات اليسرى والمؤثرات الخطية تمامًا كما في حالة حواصل ضرب المؤثرات الخطية والمتجهات اليمنى.

وهناك حاصل ضرب إضافي له معنى في مشروعنا، وهو حاصل ضرب متجه أيمن ومتجه أيسر عندما يكون المتجه الأيمن على اليسار، مثل الصورة $|A\rangle\langle B|$. ولاختبار حاصل الضرب هذا، دعنا نضربه في متجه أيمن اختياري $|P\rangle$ واضعين هذا المتجه الاختياري على اليمين، مع افتراض مسلمة الدمج في الضرب، وناتج الضرب عندئذ

هو $\langle B|P\rangle|A\rangle$، والذي يمثل متجهًا أيمن آخر، أي $|A\rangle$ مضروبًا في العدد $\langle B|P\rangle$، ويعتمد هذا المتجه الأيمن خطيًّا على المتجه الأيمن $|P\rangle$. وهكذا فإن $|A\rangle\langle B|$ يبدو كمؤثر خطي يؤثر على المتجهات اليمنى. ويمكن أيضًا أن يؤثر على متجهات يسرى وحاصل ضربه مع المتجه الأيسر $\langle Q|$ على اليسار يعطي $\langle Q|A\rangle\langle B|$ وما هو إلا العدد $\langle Q|A\rangle$ مضروبًا في المتجه الأيسر $\langle B|$. يجب أن يميز حاصل الضرب $|A\rangle\langle B|$ بشدة عن حاصل الضرب $\langle B|A\rangle$ لنفس العاملين بترتيب عكسي حيث إن حاصل الضرب الأخير بالطبع هو عدد.

لدينا الآن مشروع جبري متكامل يتضمن ثلاثة أنواع من الكميات: متجهات يسرى bra ومتجهات يمنى ket ومؤثرات خطية. ويمكن ضربها معًا بطرق مختلفة نوقشت سلفًا حيث تسري دائمًا مسلمات الدمج والتوزيع على الضرب، ولكن لا تسري مسلمة التبادل للضرب. في هذا المشروع العام ما زال لدينا قواعد الترميز الواردة بالفصل السابق، بحيث إن أي تعبير ذي قوسين كاملين يحتوي 〉 على اليسار و〈 على اليمين يمثل عددًا، بينما أي تعبير ذي قوس واحد فقط يحتوي فقط 〉 أو 〈 يمثل متجهًا.

بالنظر إلى المغزى الطبيعي للمشروع، فقد افترضنا أن المتجهات اليسرى bra والمتجهات اليمنى kets، أو بالأحرى اتجاهات هذه المتجهات تناظر حالات نظام ديناميكي عند لحظة معينة. والآن نضع افتراضًا إضافيًّا، وهو أن «المؤثرات الخطية تناظر المتغيرات الديناميكية عند تلك اللحظة». ويقصد بالمتغيرات الديناميكية كميات مثل الإحداثيات ومركبات السرعة وكمية الحركة الخطية وكمية الحركة الزاوية للجسيمات، ودوال في هذه الكميات. في الحقيقة هي المتغيرات التي تبني عليها الميكانيكا الكلاسيكية. ويستدعي الافتراض الجديد أن هذه الكميات سوف توجد أيضًا في ميكانيكا الكم ولكن مع الفارق اللافت للنظر «وهو أنها تتبع جبرًا لا تسري فيه مسلمة التبادل على الضرب».

وهذا الجبر المختلف للمتغيرات الديناميكية يعتبر أحد أهم الطرق التي تختلف فيها ميكانيكا الكم عن الميكانيكا الكلاسيكية. وسوف نرى لاحقًا، على الرغم من هذه الاختلافات الأساسية، أن المتغيرات الديناميكية في ميكانيكا الكم ما زالت تمتلك خواص كثيرة مشتركة مع المناظر الكلاسيكي لها، ويمكن أن تبنى منها نظرية قريبة الشبه من النظرية الكلاسيكية مكونة تعميمًا أنيقًا لها.

ومن المناسب استخدام نفس الحرف لنرمز به إلى المتغير الديناميكي والمؤثر الخطي المناظر له. في الحقيقة يمكننا افتراض أن المتغير الديناميكي والمؤثر الخطي المناظر له هما نفس الشيء دون حدوث أي التباس.

٨- العلاقات المترافقة

مؤثراتنا الخطية كميات مركبة، حيث يمكن للمرء أن يضربها بعدد مركب لكي يحصل على كميات أخرى لها نفس الطبيعة. ومن ثم فيجب أن تناظر عمومًا متغيرات ديناميكية مركبة، بمعنى دوال مركبة في الإحداثيات والسرعات ... إلخ. نحتاج إلى بعض التطوير الإضافي للنظرية لنرى أي نوع من المؤثرات الخطية تناظر المتغير الديناميكي الحقيقي.

خذ متجهًا أيمن هو المرافق التخيلي للمتجه الأيسر $\langle P|\alpha$. هذا المتجه الأيمن يعتمد اعتمادًا خطيًّا عكسيًّا على $\langle P|$ وعليه يعتمد اعتمادًا خطيًّا على $|P\rangle$ ومن ثم يمكن أن نعتبره كنتيجة تأثير مؤثر خطي على $|P\rangle$. وهذا المؤثر الخطي يعرف بمرافق α (adjoint) وسوف نشير إليه بالرمز $\overline{\alpha}$. بهذه الإشارة يكون المرافق التخيلي للمتجه الأيسر $\langle P|\alpha$ هو المتجه الأيمن $\overline{\alpha}|P\rangle$.

في المعادلة (7) بالفصل الأول ضع $\langle P|\alpha$ بدلًا من $\langle A|$ ومرافقها التخيلي $\overline{\alpha}|P\rangle$ بدلًا من $|A\rangle$ لتصبح النتيجة.

$$\langle B|\overline{\alpha}|P\rangle = \overline{\langle P|\alpha|B\rangle}. \qquad (4)$$

وهذه الصيغة العامة تسري لأي متجه $\langle B|$ وأي متجه $|P\rangle$ وأي مؤثر خطي α، وتعبر عن أحد أهم خواص المرافق المستخدمة مرارًا وتكرارًا.

وبوضع $\overline{\alpha}$ مكان α في (4) نحصل على:

$$\langle B|\overline{\overline{\alpha}}|P\rangle = \overline{\langle P|\overline{\alpha}|B\rangle} = \langle B|\alpha|P\rangle,$$

مع تطبيق معادلة (4) مرة أخرى مع تبادل $|P\rangle$ و$\langle B|$. وهذا يسري على أي متجه أيمن $|P\rangle$. بحيث يمكن أن نستدل مع المعادلة (4) بالفصل الأول على:

$$\langle B|\overline{\overline{\alpha}} = \langle B|\alpha,$$

وبما أن هذا يسري على أي متجه أيسر $\langle B|$ فإنه يمكننا أن نستدل على أن:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha.$$

وعليه «فإن المرافق لمرافق مؤثر خطي يكون هو المؤثر الخطي الأصلي». وهذه الخاصية للمرافق تجعله مثل المرافق المركب لعدد ما، ويمكن التحقق من الحالة الخاصة عندما يكون المؤثر الخطي عددًا، فيكون مرافق المؤثر الخطي هو العدد المركب المرافق. وهكذا فمن المعقول أن نفترض أن «مرافق مؤثر خطي يناظر المرافق المركب لمتغير ديناميكي».

بهذا المغزى الفيزيائي لمرافق أي مؤثر خطي يمكننا أن نسمي المرافق بتسمية بديلة هي المرافق المركب للمؤثر الخطي، الذي يتوافق مع الرمز $\overline{\alpha}$.

قد يساوي المؤثر الخطي مرافقه، وعندئذ يسمى «بالمرافق الذاتي» self adjoint ويناظر متغيرًا ديناميكا حقيقيًّا، وبذا يمكن تسميته بالتسمية البديلة مؤثرًا خطيًّا حقيقيًّا. أي مؤثر خطي قد ينفصل إلى جزء حقيقي وجزء تخيلي صرف. لهذا السبب فإن التسمية «المرافق المركب» تنطبق على المؤثرات الخطية ولا تنطبق التسمية «المرافق التخيلي».

والمرافق الخطي لمجموع مؤثرين خطيين هو بوضوح مجموع مرافقيهما المركبين للحصول على المرافق المركب لحاصل ضرب مؤثرين خطيين α, β، نستخدم معادلة (7) من الفصل الأول مع:

$$\langle A| = \langle P|\alpha, \qquad \langle B| = \langle Q|\overline{\beta},$$

بحيث

$$|A\rangle = \overline{\alpha}|P\rangle, \qquad |B\rangle = \beta|Q\rangle.$$

والنتيجة هي:

$$\langle Q|\overline{\beta}\overline{\alpha}|P\rangle = \overline{\langle P|\alpha\beta|Q\rangle} = \langle Q|\overline{\alpha\beta}|P\rangle$$

من المعادلة (4). وحيث إن هذا يسري على أي $\langle P|$ و$|Q\rangle$، يمكن أن نستدل على أن:

$$\overline{\beta}\overline{\alpha} = \overline{\alpha\beta}. \tag{5}$$

وهكذا «فالمرافق المركب لحاصل ضرب مؤثرين خطين يساوي حاصل ضرب المرافق المركب للعوامل في ترتيب عكسي».

وكأمثلة بسيطة لهذه النتيجة، يجب ملاحظة أنه إذا كان ξ وη حقيقيين. فعلى وجه العموم فإن $\xi\eta$ ليس بالضرورة حقيقيًّا. وهذا فرق هام بين ميكانيكا الكم والكلاسيكية. وعلى أية حال، فإن المجموع $\xi\eta + \eta\xi$ يكون حقيقيًّا، وكذلك فإن $i(\xi\eta - \eta\xi)$ يكون حقيقيًّا أيضًا. وتكون $\xi\eta$ نفسها حقيقية فقط عندما يكون المؤثران ξ وη يقبلان التبادل. وبالإضافة إلى هذا، إذا كان ξ حقيقيًّا فكذلك يكون ξ^2، وعمومًا فإن ξ^n لأي عدد صحيح موجب n يكون حقيقيًّا أيضًا.

يمكننا الحصول على المرافق المركب لمحصلة ثلاثة مؤثرات خطية بتطبيق تتابعي للقاعدة (5) للمرافق المركب لحاصل ضرب اثنين منهم ويكون لدينا:

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\alpha(\beta\gamma)} = \overline{\beta\gamma}\,\overline{\alpha} = \overline{\gamma}\,\overline{\beta}\,\overline{\alpha}, \tag{6}$$

حيث المرافق المركب لحاصل ضرب ثلاثة من المؤثرات يساوي حاصل ضرب المرافقات المركبة لهذه المؤثرات في ترتيب عكسي. ويمكن تعميم القاعدة بسهولة إلى حاصل ضرب أي عدد من المؤثرات الخطية.

من الباب السابق رأينا أن حاصل الضرب $|A\rangle\langle B|$ هو مؤثر خطي. يمكن الحصول على مرافقه المركب بالرجوع مباشرة إلى تعريف المرافق. فبضرب $|A\rangle\langle B|$ بمتجه أيسر عام $\langle P|$ لنحصل على $\langle P|A\rangle\langle B|$ الذي يكون مرافقه التخيلي هو المتجه الأيمن.

$$\overline{\langle P|A\rangle}|B\rangle = \langle A|P\rangle|B\rangle = |B\rangle\langle A|P\rangle.$$

ومن ثم فإن:

$$\overline{|A\rangle\langle B|} = |B\rangle\langle A|. \tag{7}$$

الآن لدينا عدة قواعد تتعلق بالمرافقات المركبة والمرافقات التخيلية لحواصل الضرب، ألا وهي المعادلة (7) في الفصل الأول، والمعادلات (4) و(5) و(6) و(7) في هذا الفصل، إلى جانب قاعدة المرافق التخيلي للمتجه الأيسر $\langle P|\alpha$ وهو المتجه الأيمن $\overline{\alpha}|P\rangle$. ويمكن تجميع هذه القواعد في قاعدة شاملة واحدة. «المرافق المركب أو المرافق التخيلي لحاصل ضرب أي متجهات يسرى أو متجهات يمنى أو مؤثرات خطية، يمكن الحصول عليه بأخذ المرافق المركب أو المرافق التخيلي لكل عامل مع عكس ترتيب العوامل.» ومن السهل تحقيق سريان هذه القاعدة عمومًا، وأيضًا للحالات غير المذكورة صراحة فيما سبق.

نظرية: إذا كان ξ مؤثرًا خطيًّا حقيقيًّا وكان:

$$\xi^m|P\rangle = 0 \tag{8}$$

لمتجه أيمن معين $|P\rangle$، وأن m عدد صحيح موجب فإن

$$\xi|P\rangle = 0.$$

لإثبات هذه النظرية خذ أولًا حالة $m = 2$. تعطي المعادلة (8):

$$\langle P|\xi^2|P\rangle = 0,$$

وهذا يبين أن المتجه الأيمن $\xi|P\rangle$ مضروبًا في المتجه الأيسر المرافق التخيلي $\langle P|\xi$ يساوي صفرًا. ومن الافتراض (8) في الفصل الأول وبوضع $\xi|P\rangle$ مكان $|A\rangle$ نرى أن $\xi|P\rangle$ يجب أن يساوي صفرًا. وعليه فإن النظرية تكون محققة في حالة $m = 2$.

والآن نأخذ $m > 2$ ونضع:

$$\xi^{m-2}|P\rangle = |Q\rangle.$$

فإن المعادلة (8) تعطينا الآن

$$\xi^2|Q\rangle = 0.$$

وبتطبيق النظرية في الحالة $m = 2$ نحصل على:

$$\xi|Q\rangle = 0$$

أو

$$\xi^{m-1}|P\rangle = 0. \qquad (9)$$

وبتطبيق الطريقة التي حصلنا من خلالها على المعادلة (9) من المعادلة (8) نحصل بالتتابع على:

$$\xi^{m-2}|P\rangle = 0, \qquad \xi^{m-3}|P\rangle = 0, \quad \ldots, \quad \xi^2|P\rangle = 0, \qquad \xi|P\rangle = 0,$$

ومن ثم يمكن برهنة النظرية في الحالة العامة.

٩- القيم المميزة الذاتية والمتجهات المميزة (الذاتية)

يجب علينا أن نجري تطويرًا إضافيًّا على نظرية المؤثرات الخطية ويتكون من دراسة المعادلة:

$$\alpha|P\rangle = a|P\rangle, \qquad (10)$$

حيث α مؤثر خطي وa عدد. وهذه المعادلة عادة تقدم نفسها في صيغة أن α مؤثر خطي معروف وكلًّا من العدد a والمتجه الأيمن $|P\rangle$ مجهول، يجب علينا محاولة اختيارهما ليحققا المعادلة (10)، وأن نهمل الحل (الواهي) التافه $|P\rangle = 0$.

تعني معادلة (10) أن المؤثر الخطي α المؤثر على المتجه الأيمن $|P\rangle$ يؤدي فقط إلى ضرب $|P\rangle$ في عامل عددي دون تغيير في اتجاهه، أو غير ذلك أن يضرب في عامل صفري ومن ثم ينعدم الاتجاه. وعندما يطبق المؤثر α نفسه على متجهات يمنى أخرى فسوف يؤدي بالطبع إلى تغيير كل من أطوالها واتجاهاتها على وجه العموم. ويجب ملاحظة أن اتجاه $|P\rangle$ هو المهم فقط في المعادلة (10). فإذا ضربنا المتجه الأيمن $|P\rangle$ بأي عدد غير الصفر فلن يؤثر ذلك على المعادلة سواء تحققت المعادلة (10) أم لم تتحقق.

بجانب المعادلة (10) يجب علينا أن نضع في اعتبارنا أيضًا صيغة المرافق التخيلي لهذه المعادلة

$$\langle Q|\alpha = b\langle Q|, \quad (11)$$

حيث b عدد ما. وهنا كلًّا من العدد b والمتجه الأيسر $\langle Q|$ مجهول. والمعادلتان (10) و(11) لهما أهمية أساسية في النظرية، فإنه من المراد أن يكون لدينا بعض الكلمات الخاصة لوصف العلاقات بين الكميات الداخلة في هاتين المعادلتين. وإذا تحققت المعادلة (10) فسوف نسمي a بقيمة مميزة (ذاتية) eigenvalue* للمؤثر الخطي α أو المتغير الديناميكي المناظر، وسوف نسمي المؤثر الأيمن $|P\rangle$ بالمتجه الأيمن المميز (الذاتي) للمؤثر الخطي أو المتغير الديناميكي. أضف إلى ذلك أننا سوف نقول إن المتجه الأيمن $|P\rangle$ ينتمي إلى القيمة المميزة (الذاتية) a. وبالمثل إذا تحققت المعادلة (11) فسوف تسمى b القيمة المميزة (الذاتية) للمؤثر α و$\langle Q|$ متجه أيسر مميز (ذاتي) ينتمي إلى هذه القيمة المميزة. والكلمات: القيمة المميزة (الذاتية)، والمتجه الأيمن المميز، والمتجه الأيسر المميز؛ لها معانٍ، بالطبع، «فقط للدلالة على المؤثر الخطي أو المتغير الديناميكي.»

باستخدامنا لهذه الاصطلاحات، يمكن أن نزعم أنه إذا ضرب متجه أيمن مميز للمؤثر α في أي عدد عدا الصفر فالمتجه الأيمن الناتج يكون أيضًا متجهًا أيمن مميزًا

*تستخدم في بعض الأحيان كلمة «خاصة» proper بدلًا من كلمة eigen ولكن هذه الكلمة غير مناسبة؛ إذ إن كلمتي proper وimproper تستعملان لتعني معاني أخرى. فمثلًا استخدمت كلمتي دالة معتلة improper function وطاقة خالصة proper energy في البابين ١٥، ٤٦.

منتميًا إلى نفس القيمة المميزة التي ينتمي إليها المتجه المميز الأصلي. ويمكن أن يكون لدينا اثنان أو أكثر من المتجهات اليمنى المميزة المستقلة لمؤثر خطي منتمية إلى نفس القيمة المميزة (الذاتية) لهذا المؤثر الخطي، فمثلًا يمكن أن يكون للمعادلة (10) أكثر من حل $|P1\rangle, |P2\rangle, |P3\rangle, \ldots$ مثلًا، وكلها تحقق المعادلة (10) وتنتمي إلى نفس القيمة المميزة a مع كون هذه المتجهات اليمنى المميزة $|P1\rangle, |P2\rangle, |P3\rangle, \ldots$ مستقلة بعضها عن بعض. وفي مثل هذه الحالة من الواضح أن أي تراكب خطي من المتجهات اليمنى المميزة المناظرة يكون متجهًا أيمن مميزًا آخر ينتمي إلى نفس القيمة المميزة للمؤثر الخطي، فمثلًا:

$$c_1|P1\rangle + c_2|P2\rangle + c_3|P3\rangle + \cdots$$

هو حل آخر للمعادلة (10) حيث $c_1, c_2, c_3, \ldots$ أي أعداد.

في الحالة الخاصة عندما يكون المؤثر الخطي α في المعادلتين (10) و(11) عددًا، k مثلًا، ومن الواضح أن أي متجه أيمن $\langle P|$ ومتجه أيسر $|Q\rangle$ سوف يحقق هذه المعادلات باعتبار a, b مساويين للعدد k. وعليه فإن العدد يعتبر مؤثرًا خطيًّا له قيمة مميزة (ذاتية) واحدة، وأي متجه أيمن يكون متجهًا أيمن مميزًا، وأي متجه أيسر سيكون متجهًا أيسر مميزًا، وكلاهما ينتمي إلى هذه القيمة المميزة.

ونظرية القيم المميزة والمتجهات المميزة لمؤثر خطي α غير حقيقي ليس لها استخدام واسع في ميكانيكا الكم، لذلك سوف نحصر أنفسنا في المؤثرات الخطية الحقيقية في التطوير الإضافي للنظرية. بوضع المؤثر الخطي الحقيقي ξ بدلًا من α سيكون لدينا المعادلتان التاليتان بدلًا من المعادلتين (10) و(11):

$$\xi|P\rangle = a|P\rangle, \tag{12}$$

$$\langle Q|\xi = b\langle Q|. \tag{13}$$

ويمكن الآن استنتاج ثلاث نتائج هامة:

(١) كل القيم المميزة أعداد حقيقية دائمًا. ولإثبات أن a حقيقية وتحقق المعادلة (12) نضرب المعادلة (12) في المتجه الأيسر $\langle P|$ من اليسار فنحصل على:

$$\langle P|\xi|P\rangle = a\langle P|P\rangle.$$

والآن من المعادلة (4) إذا استبدلنا $\langle P|$ بالمتجه $\langle B|$ واستبدلنا بالمؤثر الخطي α المؤثر ξ نرى أن العدد $\langle P|\xi|P\rangle$ يجب أن يكون حقيقيًّا ومن المعادلة (8) في الباب ٦

فإن $\langle P|P\rangle$ يجب أن يكون حقيقيًّا وليس صفرًا، ومن ثم يكون العدد a حقيقيًّا. وبالمثل بضرب المعادلة (13) بالمتجه الأيمن $|Q\rangle$ من اليمين يمكن إثبات أن العدد b حقيقي.

لنفترض أن لدينا حلًّا للمعادلة (12) فستصبح معادلة المرافق التخيلي:

$$\langle P|\xi = a\langle P|$$

في ضوء أن ξ, a حقيقيتان، ومعادلة المرافق التخيلي هذه تعطينا الآن حلًّا لمعادلة (13) مع $b = a$,$\langle Q| = \langle P|$ وبهذا يمكن الاستدلال على:

(٢) «القيم المميزة المصاحبة للمتجهات اليمنى المميزة هي نفسها القيم المميزة للمتجهات اليسرى المميزة.»

(٣) «المرافق التخيلي لأي متجه أيمن مميز يكون متجهًا أيسر مميزًا ينتمي لنفس القيمة المميزة (الذاتية) وبالعكس.» والنتيجة الأخيرة تجعل من المعقول أن نطلق على الحالة المناظرة لأي متجه أيمن مميز أو للمرافق التخيلي له وهو المتجه الأيسر المميز، اسم «حالة مميزة» eigenstate للمتغير الديناميكي الحقيقي ξ.

وتستخدم القيم والمتجهات المميزة لمتغيرات ديناميكية حقيقية مختلفة بكثافة في ميكانيكا الكم، ولذا فمن المرغوب فيه أن يكون لدينا طريقة ترميز منظمة للدلالة عليها. والترميز التالي يكون مناسبًا لمعظم الأغراض. إذا كانت ξ متغيرًا ديناميكيًّا حقيقيًّا فنرمز لقيمه المميزة ξ', ξ'', ξ^r إلخ وهكذا لدينا حرف يدل بنفسه على «متغير ديناميكي حقيقي» أو «مؤثر حقيقي» ونفس الحرف مع وجود شرطه أو بدليل متصل به ليرمز لعدد، أي لقيمة مميزة لما يدل عليه الحرف نفسه. والآن يمكن الدلالة على المتجه المميز بواسطة القيمة المميزة التي ينتمي إليها. وعليه فإن $|\xi'\rangle$ تمثل متجهًا أيمن مميزًا ينتمي إلى القيمة المميزة ξ' للمتغير الديناميكي ξ. وإذا كنا نتناول في جزئية ما، أكثر من متجه أيمن مميز ينتمي إلى القيمة المميزة نفسها لمتغير ديناميكي، فيمكن أن نميز كل واحد منها عن طريق إشارة أخرى، أو ربما أكثر من إشارة إضافية. وهكذا إذا كنا نتعامل مع متجهين أيمنين مميزين ينتميان إلى القيمة المناظرة ξ' نفسها يمكن أن نرمز لهما بالرمزين $|\xi'1\rangle$ و$|\xi'2\rangle$.

نظرية: «المتجهان المميزان لمتغير ديناميكي حقيقي والمنتميان إلى قيم مميزة مختلفة يكونان متعامدين.»

لإثبات هذه النظرية: ليكن $|\xi'\rangle, |\xi''\rangle$ متجهين أيمنين مميزين لمتغير ديناميكي حقيقي ξ ينتميان لقيمتين مميزتين ξ', ξ'' على الترتيب. ومن ثم يكون لدينا المعادلتان:

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle, \tag{14}$$

$$\xi|\xi''\rangle = \xi''|\xi''\rangle. \tag{15}$$

وبأخذ المرافق التخيلي للمعادلة (14) نحصل على:

$$\langle\xi'|\xi = \xi'\langle\xi'|.$$

وبالضرب في المتجه الأيمن $|\xi''\rangle$ من اليمين نحصل على:

$$\langle\xi'|\xi|\xi''\rangle = \xi'\langle\xi'|\xi''\rangle$$

وبضرب المعادلة (15) بالمتجه الأيسر $\langle\xi'|$ من الناحية اليسرى نحصل على:

$$\langle\xi'|\xi|\xi''\rangle = \xi''\langle\xi'|\xi''\rangle.$$

وبالطرح نجد أن:

$$(\xi' - \xi'')\langle\xi'|\xi''\rangle = 0, \tag{16}$$

موضحًا أنه إذا كان $\xi' \neq \xi'', \langle\xi'|\xi''\rangle = 0$، أي أن المتجهين المميزين $|\xi'\rangle, |\xi''\rangle$ متعامدان. وتعرف هذه النظرية «بنظرية التعامد» orthogonality theorem.

لقد ناقشنا خواص القيم المميزة والمتجهات المميزة لمؤثر خطي حقيقي، ولكننا لم نضع في اعتبارنا بعد مسألة ما إذا كان لمؤثر خطي حقيقي معين أي قيم مميزة وأي متجهات مميزة موجودة، وإذا كان الأمر كذلك، فكيف نوجدها؟ وإجابة هذا السؤال في منتهى الصعوبة في الحالة العامة. هناك حالة خاصة وحيدة ومفيدة، على أية حال، يمكن تتبعها بدقة، وهي عندما يحقق المؤثر الخطي الحقيقي، ξ مثلًا، علاقة جبرية على النحو التالي:

$$\phi(\xi) \equiv \xi^n + a_1\xi^{n-1} + a_2\xi^{n-2} + \cdots + a_n = 0, \tag{17}$$

بحيث تكون المعاملات a أعدادًا. وهذه المعادلة، بالطبع، تعني أن المؤثر الخطي $\phi(\xi)$ ينتج القيمة صفرًا عندما يؤثر على أي متجه أيمن أو أي متجه أيسر.

لتكن المعادلة (17) هي أبسط معادلة جبرية يحققها المؤثر ξ، ومن ثم سوف نوضح أن:

(أ) عدد القيم المميزة للمؤثر ξ يساوي n.

(ب) هناك العديد من المتجهات اليمنى المميزة للمؤثر ξ، بحيث إن أي متجه أيمن، مهما كان، يمكن التعبير عنه كمجموع لهذه المتجهات اليمنى المميزة.

ويمكن تحليل الصيغة الجبرية $\phi(\xi)$ إلى n من العوامل الخطية، لتصبح مثلا:

$$\phi(\xi) \equiv (\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3)\cdots(\xi - c_n) \qquad (18)$$

حيث c's هي أعداد ليس من المفترض أن تكون كلها مختلفة. وهذا التحليل يمكن أن يتم في حالة المؤثر الخطي ξ، تمامًا مثل ما يمكن إجراؤه عندما تكون ξ متغيرًا جبريًّا عاديًّا، حيث لا يوجد أي شيء في (18) لا يقبل التبديل مع ξ. ليكن خارج قسمة $\phi(\xi)$ على $(\xi - c_r)$ هو $\chi_r(\xi)$ بحيث

$$\phi(\xi) \equiv (\xi - c_r)\chi_r(\xi) \quad (r = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

ومن ثم لأي متجه أيمن $|P\rangle$:

$$(\xi - c_r)\chi_r(\xi)|P\rangle = \phi(\xi)|P\rangle = 0. \qquad (19)$$

والآن $\chi_r(\xi)|P\rangle$ لا يمكن أن تتلاشى لكل متجه أيمن $|P\rangle$ وإلا فإن $\chi_r(\xi)$ نفسها يجب أن تتلاشى، مما يعني أن ξ يجب أن تحقق معادلة جبرية من الدرجة $n - 1$، وهذا يناقض الافتراض أن المعادلة (17) هي أبسط معادلة جبرية تحققها ξ. وإذا اخترنا أن $\chi_r(\xi)|P\rangle$ لا يتلاشي، فإن المعادلة (19) توضح أن $\chi_r(\xi)|P\rangle$ متجه أيمن مميز للمؤثر ξ ينتمي إلى القيمة المميزة c_r. تسري الحجة لكل قيم r من 1 إلى n، ومن ثم فكل قيمة من القيم c's تكون قيمة مميزة للمؤثر ξ. ولا يوجد أي عدد آخر يمكن أن يكون قيمة مميزة للمؤثر ξ، لأنه إذا كانت ξ' أي قيمة مميزة ينتمي إليها المتجه المميز الأيمن $|\xi'\rangle$ فإن:

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$$

يمكن أن نستنتج أن:

$$\phi(\xi)|\xi'\rangle = \phi(\xi')|\xi'\rangle,$$

وحيث إن الطرف الأيسر يتلاشي فيجب أن يكون $\phi(\xi') = 0$.

ولكي نكمل إثبات (أ) يجب أن نتحقق من أن c's كلها مختلفة. لنفترض أن c's ليست كلها مختلفة، وأن c_s مثلًا تتكرر m مرة حيث $m > 1$. ومن ثم فإن $\phi(\xi)$ تأخذ الشكل:

$$\phi(\xi) \equiv (\xi - c_s)^m \theta(\xi),$$

حيث $\theta(\xi)$ دالة نسبية في المؤثر ξ. الآن تعطينا المعادلة (17)

$$(\xi - c_s)^m \theta(\xi)|A\rangle = 0 \tag{20}$$

لأي متجه أيمن $|A\rangle$ وحيث c_s قيمة مميزة للمؤثر ξ فإنها يجب أن تكون حقيقية بحيث إن $\xi - c_s$ يكون مؤثرًا خطيًّا حقيقيًّا. والآن المعادلة (20) لها نفس شكل معادلة (8) على أن يحل محل ξ المؤثر $\xi - c_s$ وأن تحل $\theta(\xi)|A\rangle$ محل $|P\rangle$. ومن النظرية المتصلة بالمعادلة (8) يمكننا أن نستدل على:

$$(\xi - c_s)\theta(\xi)|A\rangle = 0.$$

وحيث إن المتجه الأيمن $|A\rangle$ اختياري فإن:

$$(\xi - c_s)\theta(\xi) = 0,$$

وهذا يناقض افتراض أن المعادلة (17) هي أبسط معادلة تحققها ξ. ومن ثم فإن كل القيم c's مختلفة وهذا يتمم إثبات (أ).

ليكن $\chi_r(c_r)$ هو العدد الناتج عند التعويض عن ξ بالقيمة c_r في التعبير الجبري $\chi_r(\xi)$. حيث إن كل القيم c's مختلفة فإن $\chi_r(c_r)$ لا يمكن أن تتلاشى. خذ الآن التعبير:

$$\sum_r \frac{\chi_r(\xi)}{\chi_r(c_r)} - 1. \tag{21}$$

وإذا عوضنا عن ξ بالقيمة c_s فكل حد في المجموع سيتلاشي عدا الحد الذي فيه $r = s$، حيث إن $\chi_r(\xi)$ تحتوي على $(\xi - c_s)$ كمعامل عندما $r \neq s$، وأن الحد الذي فيه $r = s$ يساوي الوحدة. وبذلك يتلاشي التعبير كله. وبذلك فإن التعبير (21) يتلاشي عندما توضع ξ مساوية لأي من الأعداد $c_1, c_2, \ldots c_n$ التي عددها n، وحيث إن التعبير، على أية حال من الدرجة $n - 1$ في ξ فيجب أن يتلاشي تطابقيًّا. وإذا أثرنا الآن بالمؤثر

الخطي (21) على أي متجه أيمن اختياري $|P\rangle$ ومع مساواة النتيجة بالصفر نحصل على:

$$|P\rangle = \sum_r \frac{1}{\chi_r(c_r)} \chi_r(\xi)|P\rangle. \tag{22}$$

كل حد في هذا المجموع في الجهة اليمنى هنا وفقًا للمعادلة (19) هو متجه أيمن مميز للمؤثر ξ إذا كان لا يتلاشي. وهكذا فإن المعادلة (22) تعبر عن المتجه الأيمن الاختياري كمجموع من متجهات يمنى مميزة للمؤثر ξ، وهكذا يتم إثبات (ب).

وكمثال بسيط دعنا نضع في اعتبارنا مؤثرًا خطيًّا حقيقيًّا σ يحقق المعادلة

$$\sigma^2 = 1. \tag{23}$$

وعليه فإن للمؤثر σ قيمتين مميزتين هما $1, -1$. وأي متجه أيمن $|P\rangle$ يمكن التعبير عنه بالصورة:

$$|P\rangle = \frac{1}{2}(1+\sigma)|P\rangle + \frac{1}{2}(1-\sigma)|P\rangle.$$

ويمكن بسهولة التحقق من أن الحدين الموجودين في الطرف الأيمن للتعبير، هما متجهان مميزان للمؤثر σ للقيمتين المميزتين $1, -1$ على الترتيب عندما لا يتلاشيان.

١٠- المرصودات (الكميات القابلة للرصد)

وضعنا في هذه النظرية عددًا من الافتراضات حول الطريقة التي تمثل بها رياضيًّا الحالات والمتغيرات الديناميكية. وهذه الافتراضات ليست، بنفسها، قوانين طبيعية، ولكن تصبح قوانين طبيعية عندما نضع افتراضات إضافية تقدم تفسيرًا فيزيائيًّا للنظرية. وهذه الافتراضات الإضافية يجب أن تأخذ شكلَ بناءِ ارتباط بين نتائج المشاهدات من ناحية والمعادلات في الصيغ الرياضية من ناحية أخرى.

فعندما نجري مشاهدة (نرصد شيئًا ما) فإننا نقيس متغيرًا ديناميكيًّا. ومن الواضح فيزيائيًّا أن نتيجة القياس يجب أن تكون دائمًا عددًا حقيقيًّا، ويجب أن نتوقع أن أي متغير ديناميكي يمكننا قياسه يجب أن يكون متغيرًا ديناميكيًّا حقيقيًّا. وربما يظن المرء أنه يمكننا قياس متغير ديناميكي مركب بقياس جزئه الحقيقي وجزئه التخيلي منفصلين. ولكن هذا يتطلب قياسين أو مشاهدتين، وهذا من الممكن أن يكون صحيحًا في الميكانيكا الكلاسيكية ولكنه لا يحدث في ميكانيكا الكم، حيث إن المشاهدتين

تتداخلان عمومًا واحدة مع الأخرى — وليس من المسموح به، على وجه العموم إمكانية إجراء قياسين آنيًّا بدقة متناهية، وحتى إذا أجريا في تتابع سريع، فالقياس الأول عادة يسبب اضطرابًا في حالة المنظومة، ويُحدث عدم تحديد، ويؤثر على المشاهدة الثانية. من هنا يجب علينا أن نحصر المتغيرات الديناميكية التي يمكننا قياسها بحيث تكون حقيقية، والشرط لهذا الحصر في ميكانيكا الكم موجود في الباب ٨. وليس من الممكن قياس كل متغير ديناميكي حقيقي، ونحتاج إلى تحديد إضافي كما سوف نرى فيما بعد.

ونضع الآن بعض الافتراضات للتفسير الفيزيائي للنظرية. «إذا كانت المنظومة الديناميكية في حالة مميزة لمتغير ديناميكي حقيقي ξ تنتمي إلى قيمة مميزة ′ξ، فإن أي عملية قياس للمتغير ξ سوف ينتج عنها بالتأكيد العدد ′ξ. وبالعكس إذا كانت المنظومة في حالة بحيث إن قياس متغير ديناميكي حقيقي ξ سوف يعطي بالتأكيد قيمة محددة» (بدلًا من أن يعطي واحدة من عدة نتائج ممكنة وفقًا لقانون احتمالات كما في الحالة العامة)، «ومن ثم فإن الحالة تكون حالة مميزة للمتغير ξ وتكون نتيجة القياس هي القيمة المميزة للمتغير ξ والتي تنتمي إليها هذه الحالة المميزة.» هذه الافتراضات معقولة باعتبار أن القيم المميزة لمؤثر خطي حقيقي تكون دائمًا أعدادًا حقيقية.

سندون الآن بعض النتائج المباشرة لهذه الافتراضات. إذا كان لدينا حالتان مميزتان أو أكثر لمتغير ديناميكي حقيقي ξ تنتميان إلى نفس القيمة المميزة ′ξ، ومن ثم فإن أي حالة تتكون من أي تراكب خطي لهذه الحالات سوف تكون أيضًا حالة مميزة للمتغير ξ تنتمي إلى نفس القيمة المميزة ′ξ. ويمكن أن نستنتج أنه إذا كان لدينا حالتان أو أكثر تعطي فيها عملية قياس المتغير ξ قيمة مؤكدة ′ξ، وعليه فلأي حالة مكونة من تراكبها سوف يعطي قياس ξ بالتأكيد القيمة ′ξ. يؤدي هذا بنا إلى بعض الإدراك للمغزى الفيزيائي لتراكب الحالات. مرة أخرى، أي حالتين مميزتين للمتغير ξ تنتميان إلى قيمتين مختلفتين تكونان متعامدتين. ويمكننا أن نستنتج أن أي حالتين تعطي عملية قياس المتغير ξ فيهما بالتأكيد قيمتين مختلفتين، تكونان متعامدتين. ويعطينا هذا بعض الإدراك للمغزى الفيزيائي للحالات المتعامدة.

عندما نقيس المتغير الديناميكي الحقيقي ξ، فإن الاضطراب الداخل في عملية القياس يسبب قفزة في حالة المنظومة الديناميكية. ومن الاستمرارية الفيزيائية إذا أجرينا قياسًا ثانيًا لنفس المتغير الديناميكي ξ مباشرة بعد القياس الأول، فيجب أن تكون نتيجة القياس الثاني هي نفس نتيجة القياس الأول. وعليه فبعد إجراء القياس الأول، لن يكون هناك عدم تحديد في نتيجة القياس الثاني. ومن ثم، فإنه بعد إجراء القياس الأول، تكون المنظومة في حالة مميزة للمتغير الديناميكي ξ، حيث تكون القيمة

المميزة التي تنتمي إليها هي نتيجة القياس الأول. وهذا الاستنتاج يجب أن يظل ساريًا إذا لم يُجر القياس الثاني. وبهذه الطريقة نرى أن عملية القياس تسبب دائمًا قفزة للمنظومة إلى حالة مميزة للمتغير الديناميكي المقيس، وتكون القيمة المميزة التي تنتمي إليها هذه الحالة المميزة مساوية للقيمة الناتجة من عملية القياس.

يمكننا أن نستدل، بالنسبة للمنظومة الديناميكية في حالة ما، على «أن أي نتيجة لقياس متغير ديناميكي حقيقي تكون واحدة من قيمه المميزة» وبالعكس «فكل قيمة مميزة تكون نتيجة ممكنة لقياس متغير ديناميكي لحالة ما للمنظومة»، حيث إنها بالتأكيد النتيجة إذا كانت الحالة هي حالة مميزة تنتمي إلى هذه القيمة المميزة. وهذا يعطينا المغزى الفيزيائي للقيم المميزة. ومجموعة القيم المميزة لمتغير ديناميكي حقيقي تكون تمامًا نتائج القياس الممكنة لهذا المتغير الديناميكي، ولهذا السبب فإن حساب القيم المميزة هو مسألة مهمة.

نورد افتراضًا آخر مرتبطًا بالتفسير الفيزيائي للنظرية وهو أنه، إذا «قيس متغير ديناميكي حقيقي معين ξ مع وجود المنظومة في حالة خاصة فتكون الحالات التي يمكن أن تقفز إليها المنظومة نتيجة لعملية القياس؛ هي حالات تعتمد عليها الحالة الأصلية». والآن هذه الحالات التي من الممكن أن تقفز إليها المنظومة هي كلها حالات مميزة للمتغير ξ، ومن ثم تكون الحالة الأصلية معتمدة على الحالات المميزة للمتغير ξ. لكن ربما تكون الحالة الأصلية أي «حالة عامة»، وهكذا يمكننا استخلاص أن أي حالة عامة تعتمد على الحالات المميزة للمتغير ξ. وإذا عرفنا «الفئة التامة» complete بأنها فئة الحالات التي تكون أي حالة معتمدة على عناصرها، من هنا يمكن صياغة خلاصتنا: أن الحالات المميزة للمتغير ξ تكون فئة تامة.

وليس لكل متغير ديناميكي حقيقي عدد كاف من الحالات لتكوين فئة تامة. وهذه المتغيرات التي لا تكون الحالات المميزة لها فئة تامة ليست كميات يمكن قياسها. ونحصل بهذه الطريقة على شرط إضافي يجب أن يستوفيه المتغير الديناميكي من أجل قابلية عملية قياسه، بالإضافة إلى شرط أن يكون حقيقيًّا، ويسمى المتغير الديناميكي الحقيقي الذي تكوِّن حالاته المميَّزة فئة تامة: «مرصودًا» (قابلًا للرصد أو المشاهدة) observable. وهكذا فإن أي كمية يمكن قياسها تسمى مقيسًا/مدركًا.

والآن يطرح السؤال نفسه: هل يمكن قياس كل ما يقبل الرصد (كل المرصودات)؟ والإجابة نظريًّا نعم. ولكن من الناحية العملية، قد يكون من غير المناسب، أو ربما يتجاوز حدود إبداع القائم بالتجربة، أن يبتكر جهازًا يمكنه من قياس بعض المرصودات، ولكن النظرية تسمح للمرء تخيل إمكانية إجراء عملية القياس.

دعنا نختبر الآن رياضيًّا شرط أن يكون المتغير الديناميكي الحقيقي ξ قابلًا للرصد (مرصودًا). ربما تكون قيمه المميزة تشمل فئة من الأعداد المنفصلة (محدودة أو لانهائية)، أو بدلًا من ذلك تكون شاملة كل الأعداد في فترة معينة، كما لو كانت كل الأعداد المحصورة مثلًا بين a وb. وفي الحالة الأولي يكون الشرط أن أي حالة معتمدة على الحالات المميزة للمتغير ξ بحيث يمكن أن نعبر عن أي متجه أيمن كمجموع متجهات يمنى مميزة للمؤثر ξ. وفي الحالة الأخيرة فإن الشرط يحتاج إلى تعديل، يمكن أن يستبدل بالمجموع تكاملًا، بمعنى أن المتجه الأيمن $|P\rangle$ يمكن التعبير عنه كتكامل لمتجهات يمنى مميزة:

$$|P\rangle = \int |\xi'\rangle d\xi', \tag{24}$$

حيث $|\xi'\rangle$ متجه مميز للمؤثر ξ ينتمي إلى القيمة المميزة ξ'، ويكون مدى التكامل هو مدى القيم المميزة، بالمثل معتمد كل متجه أيمن على المتجهات اليمنى المميزة للمؤثر ξ. وليس ممكنًا التعبير عن كل متجه أيمن معتمد على المتجهات المميزة للمؤثر ξ في شكل الطرف الأيمن للمعادلة (24)، حيث إن واحدًا من المتجهات اليمنى المميزة لا يمكن التعبير عنه كذلك، وعمومًا أي مجموع من المتجهات اليمنى المميزة لا يمكن التعبير عنه في هذه الصورة. وشرط أن تكوِّن الحالات المميزة للمؤثر ξ فئة تامة يجب أن يصاغ هكذا: أي متجه أيمن $|P\rangle$ يمكن التعبير عنه بالتكامل إلى جانب مجموع لمتجهات يمنى للمؤثر ξ، بمعنى أن:

$$|P\rangle = \int |\xi' c\rangle d\xi' + \sum_r |\xi^r d\rangle, \tag{25}$$

حيث $|\xi' c\rangle, |\xi^r d\rangle$ تكون كلها متجهات يمنى مميزة للمؤثر ξ، وتم إدخال العلامات c, d بينها للتمييز عندما تكون القيم المميزة ξ', ξ^r متساوية، حيث يجري التكامل على مدى كل القيم المميزة ويجري الجمع على أي اختيار منها. وعندما يتحقق هذا الشرط في حالة كون القيم المميزة للمؤثر ξ شاملة مدى من الأعداد، عندئذ يكون المؤثر ξ قابلًا للرصد أو المشاهدة (مرصودًا).

هناك حالة أكثر عمومية والتي تحدث أحيانًا، بمعنى أن القيم المميزة للمؤثر ξ قد تشمل مدى من الأعداد، مع أعداد منفصلة موجودة خارج هذا المدى. وفي هذه الحالة فإن شرط أن يكون المؤثر ξ قابلًا للرصد أو المشاهدة (مرصودًا) لا يزال هو: أي متجه أيمن يمكن التعبير عنه في صورة الطرف الأيمن للمعادلة (25) ولكن المجموع على r يكون الآن مجموع فئة القيم المميزة المنفصلة إلى جانب تلك المختارة في المدى.

في الغالب يكون من الصعب جدًّا أن نقرر رياضيًّا ما إذا كان متغير ديناميكي حقيقي مستوفيًا لشرط أن يكون قابلًا للرصد (مرصودًا) أم لا، لأن المشكلة الأصلية في إيجاد القيم والمتجهات المميزة مشكلة صعبة جدًّا. وعلى أية حال، قد يكون لدينا سبب جيد على أسس تجريبية للاعتقاد بأن المتغير الديناميكي يمكن قياسه، ومن ثم يمكن أن نفترض بدرجة معقولة أنه قابل للرصد (مرصود) حتى ولو كان الإثبات الرياضي مفقودًا. وهذا شيء سوف نقوم به مرارًا وتكرارًا خلال عملية تطوير النظرية، فمثلًا سوف نفترض أن طاقة أي منظومة ديناميكية تكون دائمًا قابلة للرصد (مرصودة)؛ على الرغم من أن إثبات ذلك خارج نطاق قدرة التحليل الرياضي الحالي، عدا حالات بسيطة.

في الحالة الخاصة عندما يكون المتغير الديناميكي الحقيقي عددًا، فكل حالة تكون حالة مميزة، ويكون المتغير الديناميكي قابلًا للرصد (مرصودًا) بوضوح. ويعطي أي قياس له نفس النتيجة وبذلك يكون ثابتًا فيزيائيًّا تمامًا مثل الشحنة على الإلكترون. أي ثابت فيزيائي في ميكانيكا الكم قد يمكن النظر إليه كمؤثر قابل للرصد (مرصود) له قيمة مميزة منفردة، أو مجرد عدد يظهر في المعادلات، وكلتا وجهتي النظر متكافئتان.

وإذا حقق المتغير الديناميكي الحقيقي معادلة جبرية فمن النتيجة (ب) في الباب السابق يظهر أن المتغير الديناميكي يكون قابلًا للرصد (مرصودًا) ويكون لمثل هذا المتغير المرصود عدد محدود من القيم المميزة. وبالعكس أي متغير مرصود (قابل للرصد) له عدد محدد من القيم المميزة ويحقق معادلة جبرية، حيث إنه إذا كان للمتغير القابل للرصد (المرصود) ξ القيم $\xi', \xi'', \ldots, \xi^n$ كقيم مميزة فإن:

$$(\xi - \xi')(\xi - \xi'') \cdots (\xi - \xi^n)|P\rangle = 0$$

تسري على أي $|P\rangle$ متجه أيمن مميز للمؤثر ξ، وكذلك تسري على أي متجه أيمن $|P\rangle$ مهما كان، لأن أي متجه أيمن يمكن التعبير عنه كمجموع متجهات يمنى مميزة للمؤثر ξ، جراء أن المؤثر ξ قابل للرصد (مرصود) ومن ثم:

$$(\xi - \xi')(\xi - \xi'') \cdots (\xi - \xi^n) = 0. \tag{26}$$

فمثلًا يمكننا أن نضع في اعتبارنا المؤثر الخطي $|A\rangle\langle A|$ حيث إن $|A\rangle$ متجه أيمن مسوى. هذا المؤثر الخطي حقيقي طبقًا للمعادلة (7) ويكون مربعه:

$$\{|A\rangle\langle A|\}^2 = |A\rangle\langle A|A\rangle\langle A| = |A\rangle\langle A| \tag{27}$$

حيث إن $\langle A|A\rangle = 1$. وهكذا فإن مربعه يكون مساويًا له، وبهذا فهو يحقق معادلة رياضية ويكون قابلًا للرصد (مرصودًا)، وتكون قيمتاه المميزتان هما الواحد الصحيح والصفر. يمكن النظر إلى $|A\rangle$ كمتجه أيمن مميز ينتمي إلى القيمة المميزة 1، بينما كل المتجهات اليمنى المتعامدة عليه تنتمي إلى القيمة المميزة 0. وعليه فإن أي قياس للمؤثر القابل للرصد (المرصود) بالتأكيد يعطي النتيجة 1 إذا كانت المنظومة الديناميكية في الحالة المميَّزة $|A\rangle$، بينما ستكون النتيجة 0 لو كانت المنظومة في أي حالة متعامدة، وهكذا فإن هذا المؤثر يمكن أن يوصف على أنه الكمية التي تحدد إن كانت المنظومة في الحالة $|A\rangle$ أم لا.

قبل أن ينتهي هذا الباب يجب أن نفحص الشروط لكي يكون أي تكامل كالموجود في المعادلة (24) ذا معنى. لنفترض أن $|X\rangle, |Y\rangle$ متجهان أيمنان يمكن التعبير عنهما بتكاملات المتجهات المميزة اليمنى للمؤثر القابل للرصد (المرصود) ξ.

$$|X\rangle = \int |\xi' x\rangle d\xi', \qquad |Y\rangle = \int |\xi'' y\rangle d\xi'',$$

حيث استخدمنا x وy كدلالات للتمييز في الكميتين المكاملتين، وبأخذ المرافق التخيلي للمعادلة الأولى وضربها في الثانية نحصل على:

$$\langle X|Y\rangle = \iint \langle \xi' x|\xi'' y\rangle d\xi' d\xi''. \qquad (28)$$

لنضع الآن في اعتبارنا التكامل المفرد:

$$\int \langle \xi' x|\xi'' y\rangle d\xi''. \qquad (29)$$

ومن نظرية التعامد فإن التكامل هنا يجب أن يتلاشى في كل مدى التكامل عدا نقطة واحدة عندها $\xi'' = \xi'$. وإذا كانت دالة التكامل محددة عند هذه النقطة فسيتلاشى التكامل (29)، وإذا كان هذا ساريا على كل قيم ξ' فسنحصل من (28) على أن $\langle X|Y\rangle$ يتلاشى أيضًا. والآن المقدار $\langle X|Y\rangle$ لا يتلاشى عمومًا، وعليه فإن المقدار $\langle \xi' x|\xi' y\rangle$ يجب أن يكون كبيرًا كبرًا لانهائيًّا بطريقة ما تجعل التكامل (29) لا يتلاشي وله قيمة محددة. وسوف نناقش شكل الكبر اللانهائي المطلوب في الباب ١٥.

في دراستنا وحتى وقتنا الحاضر تم اعتبار — كأمر ضمني — أن متجهاتنا اليمنى واليسرى محدودة الطول، وأن حواصل ضربها القياسية محدودة أيضًا. ونرى الآن الحاجة إلى تقليص هذا الشرط عندما يتعلق الأمر بمتجهات مميزة لمرصود ما تغطي

قيمه المميزة مدى ما. وإذا لم يتم تقليصه فقد لا تحدث ظاهرة وجود مدى للقيم المميزة، وتكون نظريتنا ضعيفة لمعظم المسائل العملية.

بأخذ $|X\rangle = |Y\rangle$ نحصل عمومًا على النتيجة أن $\langle \xi' x|\xi' x\rangle$ تكون كبيرة كبرًا لانهائيًّا. ونفترض أنه إذا كان $|\xi' x\rangle \neq 0$ فإن:

$$\int \langle \xi' x|\xi'' x\rangle d\xi'' > 0, \tag{30}$$

كالمسلمة المناظرة لمعادلة (8) من الباب ٦ للمتجهات لانهائية الطول.

يعرف فراغ المتجهات اليمنى واليسرى عندما تحصر هذه المتجهات بحيث تكون محدودة الطول ولها حاصل ضرب قياسي محدد رياضيًّا «بفراغ هيلبرت» Hilbert space.

والمتجهات اليمنى واليسرى التي نستخدمها تكون فراغًا أعم من «فراغ هيلبرت». ويمكن أن نرى الآن أن مفكوك أي متجه أيمن $|P\rangle$ في شكل الطرف الأيمن لمعادلة (25) يكون وحيدًا، بشرط أنه لا يوجد حدان أو أكثر في المفكوك لهما نفس القيم المميزة. ولإثبات هذه النتيجة، دعنا نفترض أن هناك مفكوكين مختلفين للمتجه $|P\rangle$ وبطرح أحدهما من الآخر نحصل على معادلة على الصورة:

$$0 = \int |\xi' a\rangle d\xi' + \sum_s |\xi^s b\rangle, \tag{31}$$

حيث استخدمت a, b علامتان جديدتان لتمييز المتجهات المميزة والجمع على s يشمل كل الحدود الباقية بعد عملية الطرح. إذا كان هناك حد في (31) ينتمي إلى قيمة مميزة ξ^t ليست في المدى، بضرب (31) على اليسار في المتجه الأيسر $\langle \xi^t b|$ وباستخدام نظرية التعامد؛ نحصل على:

$$0 = \langle \xi^t b|\xi^t b\rangle,$$

التي تناقض المعادلة (8) في الباب ٦. مرة أخرى، إذا كانت الدالة المراد تكاملها في المعادلة (31) لا تتلاشى لبعض القيم المميزة ξ'' ليست مساوية لأي ξ^s موجودة في الجمع، وبضرب (31) من اليسار في $\langle \xi'' a|$ وباستخدام نظرية التعامد؛ نحصل على:

$$0 = \int \langle \xi'' a|\xi' a\rangle d\xi',$$

الذي يتعارض مع (30). أخيرًا إذا وجد حد في المجموع في المعادلة (31) يعود إلى قيمة مميزة ξ^t في المدى، فبضرب (31) من اليسار في المتجه $\langle \xi^t b|$ نحصل على:

$$0 = \int \langle \xi^t b|\xi' a\rangle d\xi' + \langle \xi^t b|\xi^t b\rangle \tag{32}$$

وبضرب المعادلة (31) من اليسار في $\langle \xi^t a|$:

$$0 = \int \langle \xi^t a|\xi' a\rangle d\xi' + \langle \xi^t a|\xi^t b\rangle. \tag{33}$$

والآن يكون التكامل (33) محدودًا ومن ثم يكون $\langle \xi^t a|\xi^t b\rangle$ أيضًا محدودًا وكذلك يكون $\langle \xi^t b|\xi^t a\rangle$ محدودًا. والتكامل في (32) يجب عندئذ أن يكون صفرًا. وهكذا $\langle \xi^t b|\xi^t b\rangle$ تكون مساوية للصفر ولدينا هنا تناقض. وهكذا فكل حد في المعادلة (31) يجب أن يتلاشي، ويجب أن يكون مفكوك المتجه الأيمن $|P\rangle$ في صورة الطرف الأيمن للمعادلة (25) وحيدًا.

١١- دوال المرصودات (الكميات القابلة للرصد)

ليكن ξ مؤثرًا قابلًا للرصد (مرصودًا). يمكننا ضربه بأي عدد حقيقي k ونحصل على مرصود آخر $k\xi$. ومن أجل أن تكون نظريتنا متوافقة ذاتيًّا، فمن الضروري أنه عندما تكون المنظومة في حالة بحيث يعطي قياس ما لمرصود ξ النتيجة ξ' بالتأكيد، فإن قياس المؤثر القابل للرصد (المرصود) $k\xi$ سوف يعطي بالتأكيد النتيجة $k\xi'$. ومن السهل التحقق من أن استيفاء هذا الشرط متحقق. والمتجه الأيمن المناظر لحالة ما الذي يعطي عند قياس المؤثر ξ — بالتأكيد — النتيجة ξ'؛ يجب أن يكون متجهًا مميزًا أيمن للمؤثر ξ، مثلًا $|\xi'\rangle$، يحقق:

$$\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle.$$

وهذه المعادلة تؤدي إلى:

$$k\xi|\xi'\rangle = k\xi'|\xi'\rangle,$$

والتي توضح أن $|\xi'\rangle$ متجه أيمن مميز للمؤثر $k\xi$ ينتمي إلى القيمة المميزة $k\xi'$، وهكذا فإن قياس $k\xi$ سوف يعطي بالتأكيد النتيجة $k\xi'$.

عمومًا يمكننا أن نأخذ أي دالة حقيقية في ξ ولتكن $f(\xi)$ ونعتبرها قابلة للرصد أو مرصودًا جديدًا ويمكن تلقائيًّا قياسها كلما قيست ξ، حيث إن التعيين التجريبي

للقيمة ξ يعطينا أيضًا القيمة $f(\xi)$. ولا نحتاج أن نحصر $f(\xi)$ بأن تكون حقيقية، ومن ثم يكون جزءاها الحقيقي والتخيلي قابلين للرصد ويقاسان تلقائيًّا عندما تقاس ξ. ولتوافق النظرية فمن الضروري أنه عندما تكون المنظومة في حالة بحيث إن قياس المؤثر ξ يعطي بالتأكيد النتيجة ξ'، فقياس الأجزاء الحقيقية والتخيلية للدالة $f(\xi)$ سوف يعطي بالتأكيد نتائج الأجزاء الحقيقية والتخيلية للدالة $f(\xi')$. وفي حالة ما تكون $f(\xi)$ معبرًا عنها كمتسلسلة قوى.

$$f(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \cdots,$$

حيث c's أعداد، يمكن مرة أخري التحقق من هذا الشرط بالجبر الأولي. أما في حالة دالة أعم f فربما لا يكون من الممكن تحقيق هذا الشرط. ومن ثم يستخدم هذا الشرط لتعريف الدالة $f(\xi)$، التي لم تعرف بعد رياضيًّا. وبهذه الطريقة يمكن أن نحصل على تعريف أعم لدالة الكمية القابلة للرصد عما يعطى بمتسلسلة القوى.

عمومًا نعرف $f(\xi)$ بأنها ذلك المؤثر الخطي الذي يحقق:

$$f(\xi)|\xi'\rangle = f(\xi')|\xi'\rangle \tag{34}$$

لكل متجه أيمن مميز $|\xi'\rangle$ للمؤثر ξ، وتكون $f(\xi')$ عددًا لكل قيمة مميزة ξ'. من السهل رؤية أن هذا التعريف متوافق ذاتيًّا عندما يطبق على متجهات مميزة $|\xi'\rangle$ التي تكون غير مستقلة. وإذا كان لدينا متجه مميز $|\xi'A\rangle$ معتمد على متجهات مميزة أخرى للمؤثر ξ، كل هذه المتجهات المميزة الأخرى يجب أن تنتمي جميعها للقيمة المميزة ξ'. وإلا لكان لدينا معادلة ما من النوع (31) التي رأينا استحالتها. وبضرب المعادلة التي تعبر خطيًّا عن $|\xi'A\rangle$ بدلالة المتجهات المميزة الأخرى للمؤثر ξ بالدالة $f(\xi)$ من اليسار، فنحن فقط نضرب كل حد فيها في العدد $f(\xi')$، وهكذا نحصل بوضوح على معادلة متوافقة. إضافة إلى ذلك، فإن المعادلة (34) كافية لتعريف المؤثر الخطي $f(\xi)$ تعريفا تامًّا حيث إنه للحصول على نتيجة ضرب $f(\xi)$ بالمتجه الأيمن الاختياري $|P\rangle$ فما علينا إلا فك $|P\rangle$ في صورة الطرف الأيمن للمعادلة (25) ونأخذ:

$$f(\xi)|P\rangle = \int f(\xi')|\xi'c\rangle d\xi' + \sum_r f(\xi^r)|\xi^r d\rangle. \tag{35}$$

ويعرف المرافق المركب $\overline{f(\xi)}$ للدالة $f(\xi)$ من خلال المرافق التخيلي للمعادلة (34) بمعنى:

$$\langle\xi'|\overline{f(\xi)} = \overline{f}(\xi')\langle\xi'|,$$

الذي يسري لأي متجه أيسر مميز $\langle\xi'|$ حيث $\overline{f}(\xi')$ المرافق المركب للعدد $f(\xi')$. دعنا نستبدل هنا بالمقدار ξ' المقدار ξ''، ونضرب المعادلة من اليمين بأي متجه أيمن $|P\rangle$. ومن ثم نحصل على الآتي باستخدام المفكوك (25) للمتجه $|P\rangle$،

$$\begin{aligned}\langle\xi''|\overline{f(\xi)}|P\rangle &= \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|P\rangle \\ &= \int \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|\xi'c\rangle d\xi' + \sum_r \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|\xi^r d\rangle \\ &= \int \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|\xi'c\rangle d\xi' + \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|\xi'' d\rangle\end{aligned} \tag{36}$$

بالاستعانة بنظرية التعامد، يفهم المقدار $\langle\xi''|\xi''d\rangle$ على أنه يساوي صفرًا إذا لم تكن ξ'' واحدة من القيم المميزة التي تنتمي إليها الحدود في المعادلة (25). مرة ثانية بوضع الدالة المركبة المرافقة $\overline{f}(\xi')$ بدلًا من $f(\xi')$ في المعادلة (35) وبالضرب من اليسار في $\langle\xi''|$ نحصل على:

$$\langle\xi''|\overline{f}(\xi)|P\rangle = \int \overline{f}(\xi')\langle\xi''|\xi'c\rangle d\xi' + \overline{f}(\xi'')\langle\xi''|\xi''d\rangle.$$

والطرف الأيمن هنا يساوي نظيره في (36)، حيث إن الدوال المكاملة تتلاشى عندما $\xi'' \neq \xi'$ ومن ثم:

$$\langle\xi''|\overline{f(\xi)}|P\rangle = \langle\xi''|\overline{f}(\xi)|P\rangle.$$

وهذا يسري لأي متجه مميز أيسر $\langle\xi''|$ ولأي متجه أيمن $|P\rangle$ وعليه

$$\overline{f(\xi)} = \overline{f}(\xi). \tag{37}$$

وهكذا «فإن المرافق المركب للمؤثر الخطي $f(\xi)$ يكون الدالة المرافقة المركبة $\overline{f}$ للمؤثر ξ».

ويستتبع هذا كنتيجة أنه إذا كانت $f(\xi')$ دالة حقيقية فإن $f(\xi)$ تكون مؤثرًا خطيًّا حقيقيًّا. ومن هنا أيضًا تكون $f(\xi)$ قابلة للرصد (مرصودة) حيث تكون حالاتها المميزة فئة تامة، وكل حالة مميزة للمؤثر ξ تكون حالة مميزة للدالة $f(\xi)$.

وبواسطة التعريف السابق «يمكننا أن نعطي معنى لأي دالة f لمرصود ما فقط بشرط أن نطاق وجود دالة المتغير الحقيقي $f(x)$ تشمل كل القيم المميزة للكمية القابلة للرصد (المرصود).» وإذا كان نطاق الوجود يحتوي نقاطًا أخرى بجانب هذه القيم المميزة ومن هنا فإن قيم $f(x)$ لهذه النقط الأخرى لن تؤثر على دالة المرصود. ولا يشترط أن تكون الدالة تحليلية أو متصلة. وتكون القيم المميزة لدالة f لمرصود ما هي تمامًا الدالة f للقيم المميزة للمرصود.

من المهم أن نلاحظ أن إمكانية تعريف دالة لمرصود ما ξ تتطلب وجود عدد وحيد $f(x)$ لكل قيمة للمقدار x الذي هو قيمة مميزة للمرصود. وعليه يجب أن تكون الدالة $f(x)$ دالة وحيدة القيمة. يمكن إيضاح ذلك باعتبار السؤال: عندما يكون لدينا مرصود ما $f(A)$ دالة حقيقية في المرصود A، فهل يكون المرصود A دالة في المرصود $f(A)$؟ والإجابة على هذا هي نعم، إذا كانت القيم المميزة المختلفة A' للمؤثر A تؤدي دائمًا إلى قيم مختلفة للدالة $f(A')$. وعلى أية حال، فإذا وجدت قيمتان مميزتان مختلفتان للمرصود A هما A', A'' مثلًا بحيث $f(A') = f(A'')$ ومن ثم، تقابل القيمة المميزة $f(A')$ للمرصود $f(A)$ فلن يكون هناك قيمة مميزة وحيدة للمرصود A، ولن يكون الأخير دالة للمرصود $f(A)$ في هذه الحالة.

ويمكن التحقق رياضيًّا بسهولة من التعريف أن مجموع وحاصل ضرب دالتين لمرصود ما يكون دالة في هذا المرصود، وأن دالة الدالة لمرصود ما هي إلا دالة لهذا المرصود. من السهولة أيضًا رؤية أن كل نظرية الدوال لمرصود ما تكون متماثلة بالنسبة للمتجهات اليمنى والمتجهات اليسرى على حد سواء من خلال المعادلة:

$$\langle\xi'|f(\xi) = f(\xi')\langle\xi'| \tag{38}$$

بدلًا من المعادلة (34).

وسوف ننهي هذا الباب بمناقشة مثالين ذوي أهمية عملية كبيرة، وهما بالتحديد المقلوب والجذر التربيعي. يوجد مقلوب لكمية ما قابلة للرصد (لمرصود ما) إذا لم يكن للمرصود قيمة مميزة تساوي صفرًا. إذا لم يكن للمرصود α قيمة مميزة تساوي صفرًا، فمقلوب المرصود والذي سوف نرمز له بالرمز α^{-1} أو $1/\alpha$ سوف يحقق:

$$\alpha^{-1}|\alpha'\rangle = \alpha'^{-1}|\alpha'\rangle, \tag{39}$$

حيث $|\alpha'\rangle$ متجه مميز للمؤثر α ينتمي إلى القيمة المميزة α'. ومن ثم:

$$\alpha\alpha^{-1}|\alpha'\rangle = \alpha\alpha'^{-1}|\alpha'\rangle = |\alpha'\rangle.$$

وحيث إن هذا يسري على أي متجه أيمن مميز $|\alpha'\rangle$ فيجب أن نحصل على:

$$\alpha\alpha^{-1} = 1. \tag{40}$$

وبالمثل

$$\alpha^{-1}\alpha = 1. \tag{41}$$

أي من هاتين المعادلتين يكفي لتعريف α^{-1} تمامًا وبشرط أن α ليس له قيمة مميزة مساوية للصفر. ولإثبات هذا في حالة المعادلة (40)، ليكن x مؤثرًا خطيًّا ما يحقق المعادلة:

$$\alpha x = 1$$

وبضرب الطرفين من اليسار بالمؤثر α^{-1} المعرف بالمعادلة (39) تصبح النتيجة:

$$\alpha^{-1}\alpha x = \alpha^{-1}$$

وعليه من المعادلة (41) فإن

$$x = \alpha^{-1}.$$

المعادلتان (40) و(41) يمكن استخدامهما لتعريف المقلوب عندما يوجد لمؤثر خطي عام α الذي لا يحتاج حتى لأن يكون حقيقيًّا، علما بأن إحدى هاتين المعادلتين لن تكون بالضرورة كافية للتعريف. إذا كان لكل من المؤثرين الخطيين α, β مقلوب فحاصل ضربهما $\alpha\beta$ يكون له المقلوب:

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}, \tag{42}$$

الذي يتكون من أخذ مقلوب كل عامل ثم ضربهما في ترتيب عكسي. ونتحقق من المعادلة (42) بملاحظة أن طرفها الأيمن يعطي الوحدة عندما يضرب في $\alpha\beta$ سواءً من اليمين أو اليسار. وقانون المقلوب لحواصل الضرب هذا يمكن في الحال تعميمه لأكثر من معاملين، بمعنى:

$$(\alpha\beta\gamma\cdots)^{-1} = \cdots\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

يوجد الجذر التربيعي لكمية ما قابلة للرصد (مرصود) α دائمًا، ويكون حقيقيًّا إذا لم يكن للمؤثر α قيمة مميزة سالبة. ويكتب $\sqrt{\alpha}$ أو $\alpha^{1/2}$ وهو يحقق:

$$\sqrt{\alpha}|\alpha'\rangle = \pm\sqrt{\alpha'}|\alpha'\rangle, \qquad (43)$$

حيث $|\alpha'\rangle$ متجه مميز أيمن للمؤثر α ينتمي للقيمة المميزة α'. ومن ثم:

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}|\alpha'\rangle = \sqrt{\alpha'}\sqrt{\alpha'}|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle = \alpha|\alpha'\rangle,$$

وحيث إن هذا يسري على أي متجه أيمن مميز $|\alpha'\rangle$ فعليه يجب أن يكون لدينا:

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} = \alpha. \qquad (44)$$

بسبب الغموض في الإشارة في المعادلة (43) فسوف يوجد عدة جذور تربيعية. ولتحديد واحد منهما يجب أن تعين إشارة خاصة في (43) لكل قيمة مميزة. وربما تتغير الإشارة بغير انتظام من قيمة مميزة إلى التالية، وسوف تعرف المعادلة (43) دائمًا مؤثرًا خطيًّا $\sqrt{\alpha}$ محققًا للمعادلة (44) ومكونًا دالة الجذر التربيعي للمؤثر α. إذا وجدت قيمة مميزة ما للمؤثر α ينتمي إليها متجهان مميزان أو أكثر مستقلان أحدهما عن الآخر فيجب أن يكون لدينا، وفقًا لتعريفهما للدالة، نفس الإشارة في المعادلة (43) لكل من المتجهات المميزة هذه. وعلي أية حال، إذا أخذنا إشارتين مختلفتين فستظل المعادلة (44) سارية، ومن ثم فالمعادلة (44) ليست كافية وحدها لتعريف $\sqrt{\alpha}$، إلا في الحالة الخاصة عندما يكون هناك متجه مميز واحد مستقل للمؤثر α ينتمي إلى قيمة مميزة ما.

وعدد الجذور التربيعية المختلفة لكمية ما قابلة للرصد (لمرصود ما) هو 2^n حيث n العدد الكلي للقيم المميزة غير المساوية للصفر. وعمليًّا تستخدم دالة الجذر التربيعي للمرصودات بدون قيم مميزة سالبة، والجذر التربيعي المعين والمستخدم هو ذو الإشارة الموجبة، مأخوذة دائمًا في المعادلة (43). وسوف يعرف هذا بالجذر التربيعي الموجب Positive square root.

١٢- التفسير الفيزيائي العام

الافتراضات التي وضعناها في بداية الباب ١٠ للحصول على تفسير فيزيائي للنظرية الرياضية لها نوعية خاصة، حيث يمكن الاستفادة منها فقط بارتباطها مع حالات مميزة. ونحتاج إلى افتراض أكثر عمومية ليمكننا من استخلاص المعلومات الفيزيائية من الرياضيات حتى ولو لم نتعامل مع حالات مميَّزة لأي كمية قابلة للرصد في الميكانيكا

الكلاسيكية، كما نقول: «لها قيمة» لأي حالة معينة للمنظومة وما هو المناظر لذلك في ميكانيكا الكم؟ إذا أخذنا أي كمية قابلة للرصد (مرصود) ξ وأي حالتين x, y مناظرتين للمتجهين $\langle x|, |y\rangle$ ومن هنا يمكن أن نكون العدد $\langle x|\xi|y\rangle$. وهذا العدد ليس قريب الشبه بالقيمة التي يمكن أن يأخذها المرصود في الميكانيكا التقليدية للأسباب الثلاثة الآتية:

(أ) يشير إلى «حالتين» للمنظومة بينما في الميكانيكا الكلاسيكية يشير إلى حالة واحدة.

(ب) عمومًا ليس عددًا حقيقيًّا.

(جـ) ليس محددًا تحديدًا وحيدًا بواسطة المرصود والحالات، حيث إن المتجهات $\langle x|, |y\rangle$ تشتمل على عوامل عددية اختيارية. وحتى إذا أخضعنا المتهجين $\langle x|, |y\rangle$ لشرط أن يكونا مسويين فسيظل هناك عامل غير محدد مقياسه الوحدة في $\langle x|\xi|y\rangle$. ومع ذلك تنتهي هذه الأسباب الثلاثة — على أي حال — إذا أخذنا الحالتين متطابقتين و$\langle y|$ هي المرافق التخيلي للمتجه $|x\rangle$ فإن العدد الذي نحصل عليه عندئذ، أي $\langle x|\xi|x\rangle$ يكون بالضرورة حقيقيًّا ومحددًا تحديدًا وحيدًا عندما تكون $|x\rangle$ مسواة، حيث إذا ضربنا $|x\rangle$ في العامل العددي e^{ic}، حيث c عدد حقيقي ما، يجب أن نضرب $\langle x|$ في العامل e^{-ic}، ولن تتغير $\langle x|\xi|x\rangle$.

وعليه يمكن للمرء أن يميل إلى الافتراض التجريبي أن يكون للكمية القابلة للرصد (المرصود) ξ «قيمة» هي $\langle x|\xi|x\rangle$ للحالة x بمعنى مشابه للمعنى الكلاسيكي. مع ذلك لن يكون هذا مرضيًا، للسبب التالي: دعنا نأخذ مرصودًا آخر η الذي يمكن أن يأخذ القيمة $\langle x|\eta|x\rangle$ وفقًا للافتراض السابق لهذه الحالة نفسها، ومن ثم يجب أن نتوقع لهذه الحالة — من التشابه الكلاسيكي — أن يأخذ مجموع كميتين قابلتين للرصد قيمة مساوية لمجموع قيمتي الكميتين منفصلتين، كذلك يأخذ حاصل ضرب الكميتين قيمة مساوية لحاصل ضرب قيمتي الكميتين منفصلتين. في الواقع سيعطي الافتراض التجريبي لمجموع الكميتين القابلتين للرصد $\langle x|\xi + \eta|x\rangle$ وهو في الحقيقة يساوي مجموع $\langle x|\xi|x\rangle$ و$\langle x|\eta|x\rangle$، ولكن بالنسبة لحاصل الضرب فسيعطي القيمة $\langle x|\xi\eta|x\rangle$ أو $\langle x|\eta\xi|x\rangle$ وليس لأي منهما ارتباط بأية طريقة بسيطة مع $\langle x|\xi|x\rangle$ و$\langle x|\eta|x\rangle$.

وعلى أية حالة، حيث إن الأمور تسير بصورة خاطئة في حالة الضرب وليس في حالة الجمع، فمن المقبول أن نعرف $\langle x|\xi|x\rangle$ على أنه القيمة المتوسطة للكمية القابلة للرصد (للمرصود) ξ للحالة x. وهذا نتيجة أن القيمة المتوسطة لمجموع كميتين يجب أن

تساوي مجموع متوسطاتهما، ولكن متوسط حاصل الضرب ليس بالضرورة مساويًا لحاصل ضرب متوسطاتهما، وعليه يمكننا أن نضع افتراضًا عامًّا بأنه إذا «أجري قياس الكمية القابلة للرصد (المرصود) في الحالة المناظرة للمتجه $\langle x|$ عددًا كبيرًا من المرات، فمتوسط كل النتائج سيكون $\langle x|\xi|x\rangle$ بشرط أن المتجه $\langle x|$ يكون مسوى.» إذا لم تكن $\langle x|$ مسواة بالضرورة مثلما في حالة كون x حالة مميزة لكمية قابلة للرصد منتمية إلى قيمة مميزة في مدى، يصبح الافتراض أن متوسط نتيجة قياس ξ تتناسب مع $\langle x|\xi|x\rangle$. يقدم هذا الافتراض العام أساسًا للتفسير الفيزيائي العام للنظرية.

التعبير بأن الكمية القابلة للرصد (المرصود) «لها قيمة معينة» لحالة معينة مسموح به في ميكانيكا الكم في الحالة الخاصة عندما يؤدي قياس المرصود بالتأكيد إلى القيمة المعينة، بحيث تكون الحالة هي حالة مميزة للكمية القابلة للرصد (مرصود). ويمكن التحقق بسهولة من الجبر، أنه مع هذا المعنى المحدد، لكي يكون للمرصود «قيمة» إذا كان لكميتين قابلتين للرصد قيمتان لحالة بعينها، فلهذه الحالة يكون لمجموع الكميتين (إذا كان هذا المجموع هو نفسه كمية قابلة للرصد)* قيمة مساوية لمجموع قيمتي الكميتين القابلتين للرصد منفصلتين، وحاصل ضرب هاتين الكميتين (إذا كان حاصل الضرب كمية قابلة للرصد)† له قيمة مساوية لحاصل ضرب قيمتي الكميتين منفصلتين.

وفي الحالة العامة لا يمكننا التحدث عن كمية قابلة للرصد (مرصود) لها قيمة لحالة معينة، ولكن يمكننا التحدث عن أن لها قيمة متوسطة للحالة. يمكن أن نمضي قدمًا ونتحدث عن احتمال أن تكون قيمة معينة للحالة، بمعنى احتمال الحصول على هذه القيمة الخاصة عندما يجري قياس للكمية القابلة للرصد. وهذا الاحتمال يمكن الحصول عليه من الافتراض العام بالطريقة التالية.

لتكن الكمية القابلة للرصد (المرصود) هي ξ ولتكن الحالة تناظر المتجه الأيمن المسوى $\langle x|$. ومن ثم يخبرنا الافتراض العام أنه ليست القيمة المتوسطة للمؤثر ξ هي $\langle x|\xi|x\rangle$ فقط، ولكن القيمة المتوسطة لأي دالة في ξ مثل $f(\xi)$ هي $\langle x|f(\xi)|x\rangle$ أيضًا. لنأخذ $f(\xi)$ لتكون تلك الدالة في ξ التي تساوي الوحدة عند $\xi = a$، حيث a عدد حقيقي ما، وصفرًا فيما عدا ذلك. وهذه الدالة في ξ لها معنى. وفقًا لنظريتنا العامة للدوال في الكميات القابلة للرصد يمكن الرمز لها بالرمز $\delta_{\xi a}$ تمشيًا مع الترميز العام

*هنا ليس جليًّا، حيث إنه قد لا يكون للمجموع عدد كافٍ من الحالات المميزة لتكون فئة تامة. في هذه الحالة فالمجموع، باعتباره كمية واحدة، ليس كمية قابلة للرصد.

†هنا قد يفشل شرط كونه حقيقيًّا، بجانب شرط تكوين الحالات المميزة فئة تامة.

للرمز δ ذي الدلالتين كما في (معادلة (17) في الباب ١٦ القادم). والقيمة المتوسطة لهذه الدالة في ξ هي بالضبط الاحتمال P_a مثلًا ليكون للكمية ξ القيمة a. أي أن:

$$P_a = \langle x|\delta_{\xi a}|x\rangle. \tag{45}$$

وإذا لم تكن a قيمة مميزة للمؤثر ξ، فإن ضرب $\delta_{\xi a}$ بأي متجه مميز أيمن للمؤثر ξ يكون صفرًا ومن ثم فإن $\delta_{\xi a} = 0, P_a = 0$. وهذا يتفق مع استنتاجات الباب ١٠ بأن أي نتيجة لعملية قياس كمية ما قابلة للرصد (مرصودة) يجب أن تكون إحدى قيمها المميزة.

اذا كانت نتائج القياس الممكنة للكمية ξ تكون مدى من الأعداد، فاحتمال ان تأخذ ξ بالضبط قيمة معينة ستكون صفرًا في معظم المسائل الفيزيائية. ومن ثم فالكمية التي لها أهمية فيزيائية هي احتمال أن تأخذ ξ قيمة في مدى صغير، من a إلى $a+da$ مثلًا. وهذا الاحتمال، الذي يمكن الرمز له بالرمز $P(a)da$ يساوي القيمة المتوسطة لتلك الدالة في ξ التي تساوي الوحدة عندما تقع ξ في المدى من a إلى $a+da$، وصفرًا عند قيم غيرها. ودالة ξ هذه لها معنى وفقًا لنظريتنا العامة لدوال مرصود ما. بأخذ $\chi(\xi)$ رمزًا لها، يكون لدينا:

$$P(a)da = \langle x|\chi(\xi)|x\rangle. \tag{46}$$

وإذا لم يحتوِ المدى من a إلى $a+da$ على أي قيم مميزة للمؤثر ξ يكون لدينا كما سبق $\chi(\xi) = 0, P(a) = 0$. إذا لم تكن $\langle x|$ مسواة فسيكون الطرف الأيمن في كل من (45)، (46) متناسبًا مع احتمال أن تأخذ ξ القيمة a وتقع في المدى من a إلى $a+da$ على الترتيب.

افتراض الباب ١٠ بأن قياس ξ يعطي بالتأكيد النتيجة ξ' إذا كانت المنظومة في حالة مميزة ما للكمية ξ منتمية إلى القيمة المميزة ξ' يتوافق مع الافتراض العام للتفسير الفيزيائي ويمكن في الحقيقة استنتاجه منه. بدءًا من الافتراض العام نرى أنه: إذا كانت $|\xi'\rangle$ متجهًا أيمن مميزًا للمؤثر ξ ينتمي إلى القيمة المميزة ξ'، فإنه في حالة القيم المميزة المنفصلة للمؤثر ξ يكون:

$$\delta_{\xi a}|\xi'\rangle = 0$$

إلا إذا كانت

$$a = \xi',$$

وفي حالة مدى متصل للقيم المميزة للمؤثر ξ نجد:

$$\chi(\xi)|\xi'\rangle = 0$$

ما لم يحتوِ المدى بين a و$a + da$ القيمة ξ'.

أي حالة مميزة للمؤثر ξ ينتمي إلى قيمة مميزة ξ' واقعة في مدى ما هي حالة لا يمكن إدراكها إدراكًا صارمًا عمليًّا، حيث إنها تحتاج كمية لانهائية من الدقة للحصول على ξ مساويًا تمامًا للقيمة ξ'. ومعظم ما يمكن الوصول إليه عمليًّا هو أن نحصل على ξ واقعة خلال مدى ضيق حول القيمة ξ'. من ثم تكون المنظومة في حالة تقرُّبية من الحالة المميزة للمؤثر ξ. وعليه، فالحالة المميزة المنتمية إلى قيمة مميزة في مدى هي تخيل رياضي لما يمكن الوصول إليه عمليًّا. وعلي أية حال فمثل هذه الحالات المميزة تلعب دورًا مفيدًا جدًّا في النظرية، ولا يمكن للمرء أن يؤدي العمل بطريقة جيدة بدون هذه الحالات. ويشتمل العلم على أمثلة كثيرة لمفاهيم نظرية هي نهايات أشياء نقابلها في الواقع العملي وهي مفيدة للصياغة الدقيقة لقوانين الطبيعة، بالرغم من عدم إدراكها عمليًّا، وهذا مثال آخر يضاف إليها. قد يكون الطول اللانهائي للمتجهات اليمنى المناظرة لهذه الحالات المميزة له صلة بعدم إدراكها، بينما كل الحالات المدركة تناظر متجهات يمنى يمكن تسويتها وتنتمي إلى «فراغ هيلبرت».

١٣- قابلية التبادل (التبادلية) وقابلية التوافق (التوافقية)

قد تكون حالة ما حالة مميزة لكميتين قابلتين للرصد. وإذا ناظرت الحالة متجهًا أيمن $|A\rangle$ وكانت الكميتان هما ξ, η، وعليه يكون لدينا:

$$\xi|A\rangle = \xi'|A\rangle,$$

$$\eta|A\rangle = \eta'|A\rangle,$$

حيث ξ', η' هما قيمتان مناظرتان لـ ξ, η على الترتيب، نستنتج الآن أن:

$$\xi\eta|A\rangle = \xi\eta'|A\rangle = \xi'\eta'|A\rangle = \xi'\eta|A\rangle = \eta\xi'|A\rangle = \eta\xi|A\rangle,$$

أو

$$(\xi\eta - \eta\xi)|A\rangle = 0.$$

وهذا يوعز إلى أن فرض وجود حالة مميزة آنية يكون أكثر موائمة إذا كان $\xi\eta - \eta\xi = 0$ والكميتان قابلتان للتبديل. وإذا لم تكونا قابلتين للتبديل فوجود حالة مميزة آنية لا يكون مستحيلًا ولكن يكون استثناءً. ومن ناحية أخرى، إذا «كانا يقبلان التبديل فإنه يوجد العديد من الحالات المميزة الآنية بحيث تكون فئة تامة كما سنثبت ذلك الآن.»

ليكن ξ, η مرصودين قابلين للتبديل، لنأخذ متجهًا مميزًا أيمن للمؤثر η وليكن $|\eta'\rangle$ ينتمي إلى القيمة المميزة η'، ولنقم بفكه بدلالة حدود من المتجهات اليمنى المميزة للمؤثر ξ كما في صورة الطرف الأيمن من معادلة (25)، وعليه نجد أن:

$$|\eta'\rangle = \int |\xi'\eta' c\rangle d\xi' + \sum_r |\xi^r \eta' d\rangle. \tag{47}$$

تم إدخال الرمز η' في المتجهات المميزة اليمنى للمؤثر ξ في الطرف الأيمن كدليل إضافي لتذكيرنا بأنها نتيجة مفكوك متجه أيمن خاص هو $|\eta'\rangle$ وليس لمتجه عام كما في المعادلة (25). ويمكننا الآن أن نبين أن كلًّا من هذه المتجهات المميزة للمؤثر ξ تكون أيضًا متجهات مميزة للمؤثر η تنتمي إلى القيمة المميزة η'. ويكون لدينا:

$$0 = (\eta - \eta')|\eta'\rangle = \int (\eta - \eta')|\xi'\eta' c\rangle d\xi' + \sum_r (\eta - \eta')|\xi^r \eta' d\rangle. \tag{48}$$

وإلا فإن المتجه الأيمن $(\eta - \eta')|\xi^r \eta' d\rangle$ يحقق:

$$\begin{aligned} \xi(\eta - \eta')|\xi^r \eta' d\rangle &= (\eta - \eta')\xi|\xi^r \eta' d\rangle \\ &= (\eta - \eta')\xi^r|\xi^r \eta' d\rangle \\ &= \xi^r(\eta - \eta')|\xi^r \eta' d\rangle, \end{aligned}$$

وهذا يوضح أنه متجه مميز أيمن للمؤثر ξ ينتمي إلى القيمة المناظرة ξ^r، وبالمثل فإن المتجه الأيمن $(\eta - \eta')|\xi'\eta' c\rangle$ هو متجه أيمن مميز للمؤثر ξ ينتمي إلى القيمة المناظرة ξ' ومن ثم فإن المعادلة (48) تبين أن نتيجة التكامل إلى جانب مجموع لمتجهات يمنى مميزة للمؤثر ξ تساوي الصفر. وهذا كما رأينا مع معادلة (31) يكون مستحيلًا ما لم تتلاش كل من الدالة المكاملة ويتلاش كل حد في المجموع، وعليه فإن:

$$(\eta - \eta')|\xi'\eta' c\rangle = 0, \qquad (\eta - \eta')|\xi^r \eta' d\rangle = 0,$$

وبهذا فكل المتجهات اليمنى التي تظهر في الطرف الأيمن من (47) متجهات يمنى مميزة لكل من ξ, η. تعطي المعادلة (47) مفكوكًا للمتجهات $|\eta'\rangle$ بدلالة متجهات يمنى مميزة آنية لكل من ξ, η. وحيث إن كل متجه أيمن يمكن فكه بدلالة من المتجهات المميزة

$|\eta'\rangle$ للمؤثر η، فينتج أن أي متجه أيمن يمكن فكه بدلالة المتجهات المميزة الآنية لكل من ξ وη ومن ثم فإن الحالات المميزة الآنية تكون فئة تامة.

المتجهات اليمنى المميزة الآنية السابقة لكل من ξ وη وهي $|\xi'\eta'c\rangle$ و$|\xi^r\eta'd\rangle$ تم تمييزهما بدلالة القيم المميزة ξ',η' أو ξ^r,η' التي تنتمي إليها، إلى جانب العلامات c,d التي قد تكون ضرورية. وأسلوب استخدام القيم المميزة كدلائل للمتجهات المميزة الآنية، سيتم اتباعه عمومًا في المستقبل، تمامًا كما اتبعناه في الماضي للمتجهات المميزة لمؤثر واحد.

ينص عكس النظرية السابقة على أنه إذا كان ξ,η مرصودتين (كميتين قابلتين للرصد) بحيث إن حالاتهما الآنية تكوِّن فئة تامة، فإن ξ,η تكونان قابلتين للتبديل. ولإثبات هذا نلاحظ أنه إذا كان $|\xi'\eta'\rangle$ متجهًا مميزًا آنيًّا ينتمي إلى القيم المناظرة ξ',η' فإن:

$$(\xi\eta - \eta\xi)|\xi'\eta'\rangle = (\xi'\eta' - \eta'\xi')|\xi'\eta'\rangle = 0. \tag{49}$$

وحيث إن الحالات المميزة الآنية تكون فئة تامة فإن أي متجه $|P\rangle$ اختياري يمكن أن يفك بدلالة المتجهات المميزة $|\xi'\eta'\rangle$، وتسري (49) على كل منها، وعليه:

$$(\xi\eta - \eta\xi)|P\rangle = 0$$

ومن ثم:

$$\xi\eta - \eta\xi = 0.$$

وفكرة الحالات المميزة الآنية قد تمتد لأكثر من مرصودين (كميتين قابلتين للرصد)، وتسري النظرية السابقة وعكسها بمعنى أن أي عدد من المرصودات القابلة للتبديل مثنى مثنى، «فإن حالاتها المميزة الآنية تكون فئة تامة وبالعكس». وتكون نفس البراهين المستخدمة في الإثبات في حالة المرصودين ملائمة للحالة العامة. فمثلًا إذا كان لدينا ثلاث مرصودات قابلة للتبديل ξ,η,ζ يمكن أن نفك أي متجه أيمن مميز آنيًّا للمؤثرين ξ,η بدلالة متجهات مميزة يمنى للمؤثر ζ، وهكذا يتبين أن كلًّا من هذه المتجهات المميزة للمؤثر ζ تكون متجهات مميزة لكل من ξ,η. وعليه فإن المتجهات المميزة الآنية لـ ξ,η تكون مفكوكة بدلالة متجهات مميزة آنية للمؤثرات ξ,η,ζ، وحيث إن أي متجه أيمن يمكن أن يفك بدلالة المتجهات اليمنى المميزة الآنية للمؤثرين ξ,η يمكن أيضًا أن يفك بدلالة المتجهات اليمنى المميزة الآنية للمرصودات ξ,η,ζ.

وتخبرنا نظرية التعامد المطبقة للمتجهات اليمنى المميزة الآنية أن متجهين مميزين آنيين لمجموعة من المرصودات القابلة للتبديل يكونان متعامدين إذا اختلفت فئتا القيم المميزة اللتان تنتميان إليهما بأي طريقة كانت.

نتيجة تكوين الحالات المميزة الآنية لاثنين أو أكثر من المرصودات القابلة للتبديل لفئة تامة، يمكن أن تبني نظرية لدوال في اثنين أو أكثر من المرصودات المتبادلة. على غرار نظرية المرصود الواحد المعطاة في الباب ١١ إذا كانت $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ مرصودات قابلة للتبديل، تعرف دالة عامة f لهذه المرصودات على أنها المؤثر الخطي $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ الذي يحقق

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)|\xi'\eta'\zeta' \cdots\rangle = f(\xi', \eta', \zeta', \ldots)|\xi'\eta'\zeta' \cdots\rangle, \qquad (50)$$

حيث $|\xi'\eta'\zeta' \cdots\rangle$ متجه أيمن مميز آني للمؤثرات $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ينتمي إلى القيم المميزة $\xi', \eta', \zeta', \ldots$. والدالة f هنا أي دالة بحيث إن $f(a, b, c, \ldots)$ تكون معرفة لكل القيم $a, b, c, \ldots$ وهي القيم المميزة للمؤثرات $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ على الترتيب. وكما في دالة المرصود الواحد والمعرفة في (34) يمكن أن نثبت أن $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ معرفة تعريفًا تامًّا بالمعادلة (50) وأن:

$$\overline{f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)} = \overline{f}(\xi, \eta, \zeta, \ldots),$$

مناظرًا للمعادلة (37) وأنه إذا كانت $f(a, b, c, \ldots)$ دالة حقيقية فإن $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ مؤثر خطي حقيقي وتكون كمية قابلة للرصد (مرصود).

والآن دعنا نقوم بتعميم النتائج (45) و(46) إذا أعطينا فئة من المرصودات التبادلية $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. يمكن أن نكوِّن الدالة التي تساوي الوحدة عندما $\xi = a, \eta = b, \zeta = c$ حيث إن $a, b, c, \ldots$ أعداد حقيقية وتساوي صفرًا عندما لا يتحقق أي من هذه الشروط. يمكن كتابة هذه الدالة على الصورة $\delta_{\xi a}\delta_{\eta b}\delta_{\zeta c} \cdots$، وفي الحقيقة هي بالضبط ناتج أي ترتيب للعوامل $\delta_{\xi a}, \delta_{\eta b}, \delta_{\zeta c}, \ldots$، والمعرفة كدوال لمرصود واحد، الذي يمكن رؤيته بالتعويض بحاصل الضرب هذا عن $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ في الطرف الأيسر للمعادلة (50). وتكون القيمة المتوسطة لهذه الدالة لأي حالة هي الاحتمال $P_{abc\ldots}$ مثلًا ليكون للمؤثرات $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ القيم $a, b, c, \ldots$ على الترتيب لهذه الحالة. وهكذا إذا ناظرت الحالة المتجه الأيمن المسوى $|x\rangle$ فمن افتراضنا العام للتفسير الفيزيائي على:

$$P_{abc\ldots} = \langle x|\delta_{\xi a}\delta_{\eta b}\delta_{\zeta c} \cdots |x\rangle. \qquad (51)$$

تكون $P_{abc\dots}$ صفرًا ما لم يكن كل عدد $a, b, c, \dots$ قيمة مميزة للمرصود المناظر. إذا كان أي عدد من الأعداد $a, b, c, \dots$ قيمة مميزة في مدى القيم المميزة للمرصود المناظر فتكون $P_{abc\dots}$ عادة صفرًا، ولكن في هذه الحالة نكون ملزمين بأن نستبدل بالمتطلب (أن يكون لهذا المرصود قيمة واحدة فقط)؛ المتطلب (أن يكون له قيمة واقعة خلال مدى صغير)، وهذا يشمل أن نستبدل بأحد من العوامل δ في (51) عاملًا مثل $\chi(\xi)$ في معادلة (46). وباجراء مثل هذا الاستبدالات لكل المرصودات $\xi, \eta, \zeta, \dots$ التي لها القيم العددية المناظرة $a, b, c, \dots$ في مدى قيم مميزة، سنحصل على احتمال لا يتلاشى عمومًا.

إذا تبادلت مرصودات معينة، فيوجد حالات لكل منها قيم محددة، بالمعنى المشروح في الباب ١٢، أي الحالات المميزة الآنية. وهكذا «يمكن للمرء أن يعطي معنى لبعض المرصودات التبادلية التي لها قيم في نفس الوقت.» بالإضافة إلى هذا، نرى أيضًا من (51) أنه لأي حالة «يمكن أن يعطي المرء معنى للاحتمال» لنتيجة معينة يتم الحصول عليها في قياسات لعديد من المرصودات التبادلية. وهذا الاستنتاج يعتبر تطورًا جديدًا ومهمًّا. وعلي العموم لا يمكن للمرء أن يجري عملية قياس على منظومة في حالة محددة بدون إحداث اضطراب لهذه الحالة وإفسادها بالنسبة لعملية قياس ثانية. ولا يمكن للمرء حينئذ أن يعطي أي معنى لعمليتي قياس (رصد) تجريان في وقت واحد. على الرغم من ذلك يخبرنا الاستنتاج السابق أنه في الحالة الخاصة عندما يكون المرصودان قابلين للتبديل، فتعتبر عمليتا الرصد (القياس) غير متداخلتين، أو متوافقتين بطريقة ما بحيث يستطيع المرء أن يعطي معنى لعمليتي قياس (رصد) تجريان آنيًّا، ويمكن مناقشة الاحتمال لأي نتائج معينة يتم الحصول عليها. ويمكن أن تعتبر عمليتا القياس في الحقيقة، عملية رصد واحدة (مفردة)، وبشكل أكثر تعقيدًا، يعبر عن نتيجتها بعددين بدلًا من عدد واحد. في «ضوء النظرية العامة: أي مرصودين أو أكثر، يقبلان التبديل، يمكن احتسابهما كمرصود واحد، تتكون نتيجة قياسهما من عددين أو أكثر.» والحالات التي تكون نتيجة القياس فيها بالتحديد تؤدي إلى نتيجة خاصة واحدة هي الحالات المميزة الآنية.

الفصل الثالث

التمثيلات

١٤- المتجهات الأساسية

في الأبواب السابقة قمنا ببناء مشروع جبري يشتمل على كميات مجردة معينة من ثلاثة أنواع هي المتجهات اليسرى، والمتجهات اليمنى والمؤثرات الخطية، وعبرنا عن بعض القوانين الأساسية لميكانيكا الكم بدلالتها. من الممكن الاستمرار في تطوير النظرية من خلال هذه الكميات المجردة واستخدامها في تطبيقات على مسائل معينة. وعلى أية حال ولبعض الأغراض، يكون مناسبًا أكثر أن نستبدل بالكميات المجردة فئة من الأعداد ذات خواص رياضية مشابهة، وأن نعمل بدلالة فئات الأعداد هذه. هذا الإجراء يشبه استخدام الإحداثيات في الهندسة وله ميزة إعطاء المرء قدرة رياضية أفضل لحل مسائل معينة.

والطريقة المستخدمة لنستبدل بالكميات المجردة الأعداد ليست وحيدة، فيوجد العديد من الطرق الممكنة تناظر أنظمة الإحداثيات العديدة التي يمكن الحصول عليها في الهندسة. وتسمى كل واحدة من هذه الطرق «بالتمثيل» representation، وفئة الأعداد التي تحل محل كمية مجردة ما تعرف «بالممثل» representative لهذه الكميات المجردة في التمثيل. وهكذا فإن أي ممثل لكمية مجردة يناظر الإحداثيات في كيان هندسي. وعندما يكون لدى المرء مسألة للحل في ميكانيكا الكم يمكنه تقليل الجهد باستخدام تمثيل ما، تكون فيه الممثلات للكميات المجردة الأكثر أهمية الموجودة في هذه المسألة في أبسط صورة ممكنة.

ولبناء تمثيل بطريقة عامة نأخذ فئة تامة من المتجهات اليسرى بحيث إن أي متجه أيسر يمكن التعبير عنه خطيًّا بدلالة عناصر هذه الفئة (كجمع أو تكامل أو ربما تكامل ومجموع). يطلق على هذه المتجهات اليسرى اسم «المتجهات اليسرى الأساسية» للتمثيل، وهذه الفئة كافية كما سنرى، لتعيين التمثيل تمامًا.

خذ أي متجه أيمن $|a\rangle$ وكون حاصل الضرب القياسي له مع كل واحد من المتجهات اليسرى الأساسية. الأعداد التي يتم الحصول عليها بهذه الطريقة تكون هي الممثل

للمتجه الأيمن $\langle a|$. وهي كافية لتعيين المتجه الأيمن $\langle a|$ تمامًا. بحيث إنه إذا كان هناك متجه أيمن آخر $\langle a_1|$ مثلًا، له نفس الأعداد، فإن الفرق $\langle a_1| - \langle a|$ يتلاشى حاصل ضربه القياسي مع أي متجه أساسي أيسر، ومن ثم سيتلاشى حاصل ضربه القياسي مع أي متجه أيسر مهما كان، أي أنه سيتلاشى المتجه $\langle a_1| - \langle a|$ نفسه.

ويمكننا أن نفترض ترقيم المتجهات اليسرى الأساسية ببارامتر أو أكثر $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ ويمكن أن تأخذ كل منها قيمًا عددية محددة، وستكتب هذا المتجهات اليسرى الأساسية في الصورة $|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u\rangle$. والممثل للمتجه الأيمن $\langle a|$ سيكتب في الصورة $\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle$. والآن سيتكون هذا الممثل من فئة من الأعداد، واحد لكل فئة من القيم التي يمكن أن تأخذها $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ في النطاق الخاص لكل منها. ومثل هذه الفئة من الأعداد تكوِّن دالة في المتغيرات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$. وعليه يمكن النظر إلى ممثل أي متجه أيمن إما على أنه فئة من الأعداد، أو على أنه دالة في المتغيرات المستخدمة لتمييز المتجهات اليسرى الأساسية.

إذا كان عدد الحالات المستقلة في منظومتنا الديناميكية محدودًا ويساوي n مثلًا يكون كافيًا أن نأخذ n من المتجهات اليسرى الأساسية، التي يمكن تمييزها ببارامتر واحد λ آخذًا القيم $1, 2, 3, \ldots, n$. ويتكون ممثل أي متجه $\langle a|$ الآن من فئة من الأعداد $\langle 1|a\rangle, \langle 2|a\rangle, \langle 3|a\rangle, \ldots, \langle n|a\rangle$، هي بالضبط إحداثيات المتجه $\langle a|$ منسوبة إلى نظام إحداثيات بالطريقة المعتادة. وفكرة ممثل متجه أيمن ليست سوى تعميم لفكرة الإحداثيات لأي متجه عادي، ويُختزل إلى الأخير عندما تكون أبعاد فراغ المتجهات اليمنى محدودة.

ولا توجد حاجة في التمثيل العام إلى أن تكون المتجهات اليسرى كلها مستقلة، وعلى أية حال، في معظم التمثيلات المستخدمة عمليًّا تكون كلها مستقلة، وتستوفي الشرط الأكثر صراحة بأن يكون كل اثنين منها متعامدين. وفي هذه الحالة يعرف التمثيل «بالتمثيل المتعامد».

خذ تمثيلًا متعامدًا له المتجهات اليسرى $|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u\rangle$ المميزة بالقيم $\lambda_1, \lambda_2,$ $\ldots, \lambda_u$، وكلها ذات نطق حقيقية. خذ المتجه الأيمن $\langle a|$ وكون ممثله $\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle$ وكون الآن الأعداد $\lambda_1\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle$ واعتبرها ممثلة لمتجه أيمن جديد $\langle b|$. وهذا مسموح به حيث إن الأعداد التي تكوِّن الممثل لمتجه ما أيمن تكون مستقلة، نظرًا لأن المتجهات اليسرى الأساسية مستقلة. يعرف المتجه الأيمن $\langle b|$ بالمعادلة:

$$\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|b\rangle = \lambda_1\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle.$$

في الواقع إن المتجه الأيمن $|b\rangle$ دالة خطية في المتجه الأيمن $|a\rangle$، وبذلك يمكن اعتباره نتيجة تأثير مؤثر خطي على $|a\rangle$. بتسمية هذا المؤثر الخطي L_1، يكون لدينا:

$$|b\rangle = L_1|a\rangle$$

ومن ثم

$$\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|L_1|a\rangle = \lambda_1\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle.$$

وتسري هذه المعادلة على أي متجه أيمن، وعليه نحصل على:

$$\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|L_1 = \lambda_1\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|. \quad (1)$$

ويمكن النظر إلى المعادلة (1) كتعريف للمؤثر الخطي L_1. وهي توضح أن «كل متجه أيسر أساسي هو متجه أيسر مميز للمؤثر L_1 وتكون القيمة للبارامتر λ_1 هي القيمة المميزة التي ينتمي إليها».

ومن شرط أن المتجهات اليسرى الأساسية متعامدة يمكن أن نستنتج أن L_1 حقيقي ومؤثر قابل للرصد (مرصود). ليكن $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_u$ و$\lambda''_1, \lambda''_2, \ldots, \lambda''_u$ فئتين من القيم للمعاملات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$. بوضع قيم كل من λ''s بدلا من λ's في المعادلة (1) وبالضرب من اليمين في المتجه الأيمن $|\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u\rangle$ نحصل على المرافق التخيلي للمتجه الأيسر الأساسي $\langle\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u|$

$$\langle\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u|L_1|\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u\rangle = \lambda'_1\langle\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u|\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u\rangle.$$

وبتبادل قيم λ''s, λ'''s نحصل على:

$$\langle\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u|L_1|\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u\rangle = \lambda''_1\langle\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u|\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u\rangle.$$

وطبقًا لأن المتجهات اليسرى الأساسية متعامدة، فإن الأطراف اليمنى هنا تتلاشى ما لم تكن $\lambda''_r = \lambda'_r$ لكل قيم r من 1 إلى u، وفي هذه الحالة فإن الأطراف اليمنى تكون متساوية، كما أنها حقيقية أيضًا وλ'_1 حقيقية وهكذا، وسواء كانت λ'''s تساوي λ''s أم لا فإن:

$$\begin{aligned}\langle\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u|L_1|\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u\rangle &= \overline{\langle\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u|L_1|\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u\rangle}\\ &= \langle\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_u|\overline{L}_1|\lambda''_1\lambda''_2\cdots\lambda''_u\rangle\end{aligned}$$

من المعادلة (4) في الباب ٨، حيث إن $\langle\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_u'|$'s فئة تامة من المتجهات اليسرى الأساسية وكذلك $|\lambda_1''\lambda_2''\cdots\lambda_u''\rangle$'s هي فئة تامة من المتجهات اليمنى يمكن أن نستدل على أن $L_1 = \overline{L}_1$. والشرط الإضافي اللازم ليكون L_1 مؤثرًا مرصودًا (قابلًا للرصد) — بمعنى أن حالاته المميَّزة تكوِّن فئة تامة — واضح أنه مستوفى حيث إن له كمتجهات يسرى مميزة المتجهات اليسرى الأساسية التي تكوِّن فئة تامة.

وبالمثل يمكننا أن نقدم مؤثرات خطية $L_2, L_3, \dots, L_u$ بضرب $\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|a\rangle$ بالعوامل $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_u$ على التوالي، ونعتبر فئات الأعداد الناتجة ممثلات للمتجهات اليمنى. وكل من هذه المؤثرات الخطية L's يمكن أن ينظر إليه بنفس الطريقة على أن له المتجهات اليسرى الأساسية كمتجهات يسرى مميزة وأنه مؤثر حقيقي مرصود (قابل للرصد). والمتجهات اليسرى الأساسية تكون متجهات يسرى مميزة آنيا لكل مؤثر L. وحيث إن هذه المتجهات اليسرى المميزة الآنية تكوِّن فئة تامة فطبقًا للنظرية في الباب ١٣ فإن أي مؤثرين من المؤثرات L's يكونان قابلين للتبديل.

وسوف نوضح الآن أنه «إذا كانت $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_u$ أي فئة من المرصودات القابلة للتبديل، يمكن أن نبني تمثيلًا متعامدًا تكُون فيه المتجهات اليسرى الأساسية آنيًّا متجهات يسرى مميزة للمؤثرات $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_u$.» دعنا نفترض أنه يوجد فقط متجه أيسر مميز واحد آنيًّا للمؤثرات $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_u$ ينتمي إلى أي فئة من القيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_u'$. ومن ثم يمكننا أن نأخذ هذه المتجهات اليسرى المميزة الآنية، مع عوامل عددية اختيارية، كمتجهاتنا اليسرى الأساسية. وكل هذه المتجهات متعامدة طبقًا لنظرية التعامد (أي اثنين منها يكون لهما على الأقل قيم مميزة مختلفة، وهذا يكفي لجعلهما متعامدين) ويكون هناك عدد كاف لتكوين فئة تامة، من نتيجة الباب ١٣. قد يكون من المناسب أن يُميَّزوا بالقيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_u'$ التي ينتمون إليها ومن ثم يكتب واحد منها على الصورة $\langle\xi_1'\xi_2'\cdots\xi_u'|$.

وننتقل الآن إلى الحالة العامة عندما يوجد عدة متجهات يسرى مميزة آنية مستقلة للمؤثرات $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_u$ منتمية إلى بعض فئات القيم المميزة، فيجب علينا أن نختار من كل المتجهات اليسرى المميزة والمنتمية لفئة القيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_u'$ فئة جزئية تامة جميع عناصرها متعامدة مثنى مثنى. (وشرط التمام هنا يعني أن أي متجه آني أيسر مميز منتمٍ للقيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_u'$ يمكن التعبير عنه خطيًّا بدلالة عناصر هذه الفئة الجزئية). ويجب أن نجري ذلك لكل فئة من القيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_u'$ ثم نضع عناصر كل هذه الفئات الجزئية معًا ونتخذها كمتجهات يسرى أساسية للتمثيل. وكل هذه المتجهات اليسرى تكون متعامدة، فيتعامد كل اثنين منها طبقًا

لنظرية التعامد؛ إذا كانا منتميين لفئات قيم مميزة مختلفة، أو طبقًا للطريقة الخاصة التي تم اختيارهم بها إذا انتموا إلى نفس فئة القيم المميزة، ويكوِّنون معًا فئة تامة من المتجهات اليسرى، إذ إن أي متجه أيسر يمكن التعبير عنه خطيًّا بدلالة المتجهات اليسرى المميزة، وكل متجه أيسر مميز آني يمكن التعبير عنه خطيًّا بدلالة عناصر فئة جزئية ما. ويوجد عدد لانهائي من الطرق لاختيار الفئات الجزيئة، وتعطى كل طريقة تمثيلًا متعامدًا.

لتصنيف المتجهات اليسرى الأساسية في هذه الحالة العامة، يمكننا استخدام القيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_u'$ التي ينتمون إليها، معًا إلى جانب متغيرات حقيقية إضافية معينة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v$ مثلًا، التي يجب أن تُقترح للتمييز بين أحد المتجهات والآخر من المتجهات الأساسية المنتمية إلى نفس فئة القيم المميزة. وحيئنذ يكتب متجه ما أيسر أساسي في الصورة $\langle \xi_1'\xi_2'\cdots\xi_u'\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_v|$. يمكن أن نعرِّف مؤثرات خطية $L_1, L_2, \ldots, L_v$ مناظرة للمتغيرات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v$ كما في المعادلة (1). ويمكن أن نبين أن هذه المؤثرات الخطية لها المتجهات اليسرى الأساسية كمتجهات يسرى مميزة، وأنها مؤثرات حقيقية ومرصودة (قابلة للرصد)، كما أنها تقبل التبديل كلٌّ مع الآخر ومع المؤثرات ξ's. فالمتجهات اليسرى الأساسية الآن هي متجهات يسرى مميزة آنية لكل المؤثرات المرصودة المتبادلة $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u, L_1, L_2, \ldots, L_v$.

دعنا نُعرِّف فئة تامة من المرصودات المتبادلة لتكون فئة من المرصودات التي يقبل كل واحد منها التبديل مع الآخر والتي يوجد لها حالة آنية واحدة فقط تنتمي إلى فئة من القيم المميزة. وحينئذ تكوِّن المرصودات $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u, L_1, L_2, \ldots, L_v$ فئة تامة من المرصودات المتبادلة، ويوجد متجه أيسر مناظر واحد فقط مستقل وآني ينتمي إلى القيم المميزة $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_u', \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_v$ هو المتجه الأيسر المناظر. وبالمثل فالمؤثرات القابلة للرصد (المرصودة) $L_1, L_2, \ldots, L_u$ والمعرفة بالمعادلة (1) وما تلاها من دراسة تكوِّن فئة تامة من المؤثرات القابلة للرصد والتبديل (المرصودات المتبادلة). وبمساعدة هذا التعريف فإن النتائج لهذا الباب يمكن صياغتها باختصار كالتالي:

(أ) المتجهات اليسرى الأساسية لتمثيل متعامد هي في الوقت نفسه متجهات يسرى مميزة لفئة تامة من المؤثرات القابلة للرصد والتبديل (مرصودات تبادلية).

(ب) لفئة تامة من المرصودات التبادلية المعطاة، يمكن بناء تمثيل متعامد تكون فيه المتجهات اليسرى الأساسية في الوقت نفسه متجهات يسرى مميزة لهذه الفئة التامة.

(جـ) أي فئة من المرصودات التبادلية يمكن أن توضع داخل فئة تامة تبادلية بأن تضاف إليها مرصودات معينة.

(د) هناك طريقة ملائمة لتصنيف المتجهات اليسرى الأساسية في تمثيل متعامد عن طريق القيم المميزة لفئة المرصودات التبادلية التامة التي تكون لها المتجهات اليسرى الأساسية في الوقت نفسه متجهات يسرى مميزة.

نطلق على المرافق التخيلي للمتجهات اليسرى الأساسية لتمثيل ما اسم «المتجهات اليمنى الأساسية». وهكذا إذا أشرنا إلى المتجهات اليسرى، بالرمز $\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|$، فالمتجهات اليمنى الأساسية يشار إليها بالرمز $|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u\rangle$. ويعطَى أي متجه أيسر $\langle b|$ بحاصل ضربه القياسي مع كل من المتجهات اليمنى الأساسية أي بواسطة $\langle b|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u\rangle$. ويمكن بصفته ممثل متجه ما أيمن النظر إليه إما كفئة من الأعداد أو كدالة في المتغيرات $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_u$، ويكون لدينا:

$$\langle b|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u\rangle = \overline{\langle\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_u|b\rangle},$$

مظهرًا أن «ممثل متجه ما أيسر هو المرافق المركب لمثل المتجه الأيمن المرافق التخيلي له.» وفي تمثيل متعامد ما، حيث المتجهات اليسرى الأساسية هي في نفس الوقت متجهات يسرى مميزة لفئة تامة من المرصودات التبادلية $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_u$ مثلًا تكون المتجهات اليمنى الأساسية في نفس الوقت متجهات يمنى مميزة لنفس المؤثرات $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_u$.

حتى الآن لم نتطرق إلى أطوال المتجهات الأساسية. ففي تمثيل متعامد فإن الشيء الطبيعي الذي يجب عمله هو معايرة (تسوية) المتجهات الأساسية بدلًا من ترك أطوالها اختيارية، وهكذا نقترح خطوة إضافية لتبسيط التمثيل. على أية حال، فإنه من الممكن تسوية هذه المتجهات فقط إذا كانت البارامترات التي تصنفها كلها تأخذ قيمًا متفرقة. أما إذا كان أي من هذه البارامترات متغيرات متصلة، بحيث يمكن أن تأخذ كل القيم في نطاق ما، فستكون المتجهات الأساسية متجهات مميزة لبعض المؤثرات المنتمية إلى قيم مميزة في مدى ما ولها أطوال لانهائية، من المناقشة في الباب ١٠ فيما بعد المعادلة (29) إلى ما بعد المعادلة (30). ونحتاج إلى وسيلة أخري لتثبيت العوامل العددية التي يضرب بها المتجهات الأساسية. ولإيجاد طريقة ملائمة للتعامل مع هذه المسألة نحتاج إلى ترميز رياضي جديد سيعطى في الباب التالي.

١٥- الدالة δ

أوصلتنا المعادلة في الباب ١٠ إلى الأخذ في الاعتبار كميات تحتوي على نوع ما من اللانهائية. ولكي نحصل على ترميز دقيق يتعلق بهذه اللانهائيات، نقترح الكمية $\delta(x)$ المعتمدة على بارامتر x وتحقق الشروط:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$
$$\delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0. \tag{2}$$

وللحصول على تصور للدالة $\delta(x)$، خذ دالة في متغير حقيقي x تتلاشى في أي مكان عدا داخل نطاق صغير، بطول ϵ مثلًا، ومحيط بنقطة الأصل $x = 0$، وتكون هذه الدالة كبيرة جدًّا داخل هذا النطاق بحيث يكون تكاملها على هذا النطاق يساوي الواحد الصحيح. والشكل الدقيق للدالة داخل هذا النطاق لا يهم، بشرط أنه لا توجد تغيرات جامحة غير ضرورية (مثلًا بشرط أن تكون الدالة دائمًا من رتبة ϵ^{-1}). حينئذ عند النهاية $\epsilon \to 0$ ستئول هذه الدالة إلى $\delta(x)$.

و$\delta(x)$ ليست دالة في x وفقًا للتعريف الرياضي للدالة — الذي يستدعي أن تكون للدالة قيمة محددة عند كل نقطة داخل النطاق — ولكنها شيء أكثر عمومية، يمكن أن نسميه «دالة معتلة» لبيان الفرق بينها وبين الدالة المعرفة بالتعريفات العادية. ولذا فإن $\delta(x)$ ليست كمية يمكن استخدامها عمومًا في التحليل الرياضي مثل أية دالة عادية، ولكن يجب أن يكون استخدامها محصورًا في أنواع بسيطة معينة من التعبيرات يكون واضحًا فيها عدم ظهور أي التباس.

وأهم خاصية للدالة $\delta(x)$ يمكن أن نضرب لها مثلًا بالمعادلة التالية:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0), \tag{3}$$

حيث $f(x)$ أي دالة متصلة في x. ويمكننا بسهولة أن نرى صحة هذه المعادلة من التصور السابق للدالة $\delta(x)$. الطرف الأيسر في المعادلة (3) يمكن أن يعتمد فقط على قيم $f(x)$ القريبة جدًّا من نقطة الأصل، بحيث يمكننا استبدال بالدالة $f(x)$ قيمتها عند نقطة الأصل $f(0)$ بدون خطأ يذكر والمعادلة (3) حينئذ تنتج من المعادلة (2). وبإجراء تغيير لنقطة الأصل في المعادلة (3) يمكن أن نستنتج الصيغة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a), \tag{4}$$

حيث a أي عدد حقيقي. وهكذا «فعملية ضرب دالة في x بالدالة $\delta(x-a)$ وبالتكامل على كل قيم x تكافئ عملية تعويض a محل x». وتسري هذه النتيجة العامة أيضًا إذا كانت دالة x ليست دالة عددية، ولكن متجهًا أو مؤثرًا خطيًّا معتمدًا على x.

نطاق التكامل في (3)، (4) لا يحتاج أن يكون من $-\infty$ إلى ∞ ولكن يمكن أن يكون أي نطاق يحيط بالنقطة الحرجة التي لا تتلاشى عندها الدالة δ. فيما يلي سنحذف حدود التكامل في مثل هذه المعادلات، حيث يفهم أن نطاق التكامل هو النطاق المناسب.

توضح المعادلات (3)، (4) أنه، على الرغم من أن الدالة المعتلة ليس لها بنفسها قيمة معينة تعيينًا جيدًا، لكن عندما توجد كعامل في دالة مكاملة ما فإن التكامل يكون له قيمة معينة تعيينًا جيدًا. وفي النظرية الكمية، عندما تظهر دالة «معتلة» ستكُون شيئًا يتم استخدامه أخيرًا في الدالة المكاملة، وعليه فمن الممكن إعادة كتابة النظرية في شكل ما تظهر فيه الدالة «المعتلة» فقط في الدوال المكاملة، ويمكن حينئذ التخلص من الدوال المعتلة كلية. واستخدام الدوال «المعتلة» لا يشمل بهذه الطريقة أي نقص في دقة النظرية، ولكنها فقط ترميز مناسب، تمكننا من التعبير بشكل دقيق عن علاقات يمكننا — عند الضرورة — إعادة كتابتها في صورة لا تحتوي الدوال «المعتلة»، ولكن بطريقة مجهدة قد تؤدي إلى غموض المناقشة.

هناك طريقة أخرى لتعريف الدالة δ هي المعامل التفاضلي $\epsilon'(x)$ للدالة $\epsilon(x)$، دالة الدرج (Step function) المعطاة بالعلاقة.

$$
\begin{aligned}
\epsilon(x) &= 0 \quad (x<0) \\
&= 1 \quad (x>0).
\end{aligned} \tag{5}
$$

يمكن أن نتحقق من تكافؤ التعريف السابق بالتعويض عن $\delta(x)$ بالدالة $\epsilon'(x)$، في الطرف الأيسر للمعادلة (3) وبإجراء التكامل بالتجزيء. فنجد للعددين الموجبين g_1, g_2 ما يلي:

$$
\begin{aligned}
\int_{-g_2}^{g_1} f(x)\epsilon'(x)dx &= [f(x)\epsilon(x)]_{-g_2}^{g_1} - \int_{-g_2}^{g_1} f'(x)\epsilon(x)dx \\
&= f(g_1) - \int_0^{g_1} f'(x)dx \\
&= f(0),
\end{aligned}
$$

نتيجة متفقة مع (3). وتظهر الدالة δ عندما يتم تفاضل دالة غير متصلة.

يوجد عدد من المعادلات الأولية يمكن كتابتها حول الدوال δ. وجوهريًّا هذه المعادلات هي قواعد أساسية «لمعالجة المقادير الجبرية» المشتملة على الدالة δ. ومعنى أي من هذه المعادلات هو أن جانبيها يعطيان نتائج متكافئة كعوامل في أي دالة مكاملة. وكأمثلة لمثل هذه المعادلات، لدينا:

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{6}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{7}$$

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \quad (a > 0), \tag{8}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2}a^{-1}\left\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\right\} \quad (a > 0), \tag{9}$$

$$\int \delta(a-x)dx\,\delta(x-b) = \delta(a-b), \tag{10}$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \tag{11}$$

والمعادلة (6) التي تنص فقط على أن $\delta(x)$ دالة زوجية في المتغير x نتيجة واهية. وللتحقق من (7) خذ أي دالة متصلة $f(x)$، عندئذ:

$$\int f(x)x\delta(x)dx = 0,$$

وعليه فإن وجود $x\delta(x)$ كعامل في الدالة المكاملة يكافئ الصفر، وهو تمامًا معنى (7). يمكن التحقق من (8)، (9) ببراهين أولية بسيطة. وللتحقق من (10)، خذ أي دالة متصلة $f(a)$ في المتغير a عندئذ:

$$\int f(a)da \int \delta(a-x)dx\,\delta(x-b) = \int \delta(x-b)dx \int f(a)da\,\delta(a-x)$$
$$= \int \delta(x-b)dx\,f(x) = \int f(a)da\,\delta(a-b).$$

وهكذا يتكافأ طرفا المعادلة (10) كمعاملين في دالة مكاملة حيث a متغير التكامل. وبنفس الطريقة يمكن تبيان أنهما متكافئان أيضًا كعوامل في دالة مكاملة مع b كمتغير التكامل، وهكذا يتم تبرير المعادلة (10) من كلتا وجهتي النظر. ويمكن تبرير المعادلة (11) بسهولة أيضًا باستخدام المعادلة (4) من وجهتي نظر مختلفتين.

من الممكن استنتاج المعادلة (10) كتطبيق للمعادلة (4) مع $f(x) = \delta(x-b)$. ولدينا هنا إيضاح لحقيقة أنه يمكننا استخدام دالة «معتلة» غالبًا كما لو كانت دالة عادية متصلة دون الحصول على نتيجة خاطئة.

توضح المعادلة (7) أنه عندما يتم قسمة طرفي معادلة ما على متغير x الذي يمكن أن يأخذ القيمة صفرًا، فيجب أن يضاف إلى أحد طرفي المعادلة مضاعفات اختيارية من $\delta(x)$. أي أن من أي معادلة:

$$A = B \tag{12}$$

لا يمكن الاستدلال على

$$A/x = B/x,$$

ولكن فقط

$$A/x = B/x + c\delta(x), \tag{13}$$

حيث c مجهول.

وكإيضاح للتعامل مع الدالة δ، يمكننا أن نأخذ تفاضل $\log x$. والصيغة المعتادة:

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{14}$$

تحتاج الفحص للجوار حول النقطة $x = 0$. لكي نجعل الدالة المقلوبة $1/x$ معرفة بدقة في جوار $x = 0$ (في مفهوم دالة معتلة ما) فيجب أن نشترط شرطًا إضافيًّا مثل أن يتلاشى تكاملها من $-\epsilon$ إلى ϵ. مع هذا الشرط الإضافي يتلاشى تكامل الطرف الأيمن في المعادلة (14) من $-\epsilon$ إلى ϵ، بينما تكامل طرف المعادلة (14) الأيسر يساوي $\log(-1)$، وبذلك فالمعادلة (14) ليست صحيحة. ولتصحيحها يجب أن نتذكر أنه بأخذ القيم الأساسية فإن للدالة $\log x$ حد تخيلي خالص هو $i\pi$ لقيم x السالبة، وعندما تمر x عبر القيمة صفر فإن هذا الحد التخيلي الخالص يتلاشى تلاشيًا غير متصل. تفاضل هذا الحد التخيلي الخالص يعطينا النتيجة $-i\pi\delta(x)$ وعليه يجب صياغة (14) كما يلي:

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{15}$$

هذه التركيبة الخاصة بين مقلوب الدالة ودالة δ الظاهرة في المعادلة (15) تلعب دورًا هامًا في النظرية الكمية لعمليات التصادم (انظر الباب ٥٠).

١٦- خواص المتجهات الأساسية

باستخدام رمز الدالة δ، يمكن أن نتقدم في نظرية التمثيل. دعنا نفترض أولا أن لدينا مؤثرًا قابلًا للرصد (مرصودًا) وحيدًا ξ مكونًا بنفسه فئة تامة تبادلية، والشرط لهذا هو وجود حالة مميزة واحدة فقط للمؤثر ξ منتمية إلى قيمة مميزة ξ'. ودعنا نبني تمثيلًا متعامدًا تكون فيه المتجهات الأساسية متجهات مميزة للمؤثر ξ وتكتب $\langle\xi'|, |\xi'\rangle$.

وفي الحالة عندما تكون القيم المميزة للمؤثر ξ منفصلة، يمكن أن تُسوى المتجهات الأساسية. عندئذ يكون لدينا:

$$\langle\xi'|\xi''\rangle = 0 \quad (\xi' \neq \xi''),$$
$$\langle\xi'|\xi'\rangle = 1.$$

ويمكن أن تدمج هاتين المعادلتين في معادلة واحدة هي:

$$\langle\xi'|\xi''\rangle = \delta_{\xi'\xi''}, \tag{16}$$

حيث الرمز δ له دليلان، غالبًا سيتم استخدامه كثيرًا في المستقبل، وله المعنى:

$$\begin{aligned} \delta_{rs} &= 0 \quad \text{when } r \neq s \\ &= 1 \quad \text{when } r = s. \end{aligned} \tag{17}$$

وعندما تكون القيم المميزة للمؤثر ξ متصلة، لا يمكن معايرة (تسوية) المتجهات الأساسية وإذا وضعنا في اعتبارنا الآن الكمية $\langle\xi'|\xi''\rangle$ حيث ξ' ثابتة ξ'' متغير، سنرى من الدالة المكاملة المتصلة بالتعبير (29) في الباب ١٠؛ أن هذه الكمية تتلاشى إذا كانت $\xi' \neq \xi''$ وأن تكامل هذه الكمية على نطاق ξ'' الذي يمتد ليشمل القيمة ξ' يكون محدودًا ويساوي c مثلًا. وعليه فإن:

$$\langle\xi'|\xi''\rangle = c\delta(\xi' - \xi'').$$

ومن المعادلة (30) في الباب ١٠ تكون c عددًا موجبًا يمكن أن يتغير مع ξ' ولذا فيجب أن تكتب $c(\xi')$ وباختصار c'، وعليه يكون لدينا:

$$\langle\xi'|\xi''\rangle = c'\delta(\xi' - \xi''). \tag{18}$$

وبطريقة بديلة يكون لدينا:

$$\langle \xi' | \xi'' \rangle = c'' \delta(\xi' - \xi''), \tag{19}$$

حيث c'' اختصار للرمز $c(\xi'')$، والأطراف اليمنى في (18) و(19) متساوية وفقًا للمعادلة (11).

دعنا ننتقل إلى تمثيل آخر تكون متجهاته الأساسية حالات مميزة للمؤثر ξ، والمتجهات الأساسية الجديدة هي مضاعفات عددية للمتجهات السابقة لنرمز للمتجهات الأساسية الجديدة بالرمز $\langle \xi'^*|, |\xi'^*\rangle$ باستخدام النجمة $*$ الإضافية لتمييزها من المتجهات السابقة، لدينا:

$$\langle \xi'^* | = k' \langle \xi' |, \qquad |\xi'^* \rangle = \overline{k'} | \xi' \rangle,$$

حيث k' اختصار للرمز $k(\xi')$ عدد يعتمد على ξ'. نحصل على:

$$\langle \xi'^* | \xi''^* \rangle = k' \overline{k''} \langle \xi' | \xi'' \rangle = k' \overline{k''} c' \delta(\xi' - \xi'')$$

وذلك باستخدام المعادلة (18) ويمكن أن تكتب هكذا:

$$\langle \xi'^* | \xi''^* \rangle = k' \overline{k'} c' \delta(\xi' - \xi'')$$

من المعادلة (11). باختيار k' بحيث يكون معياره يساوي $c'^{-1/2}$ وذلك ممكن حيث إن c' موجبة، ونرتب لنحصل على:

$$\langle \xi'^* | \xi''^* \rangle = \delta(\xi' - \xi''). \tag{20}$$

أطوال المتجهات الأساسية الجديدة ثابتة الآن بحيث تجعل التمثيل أسهل ما يمكن. وطريقة تثبيت هذه المتجهات الأساسية مشابهة بدرجة ما لمعايرة المتجهات الأساسية في حالة القيم المنفصلة ξ'، وتأخذ المعادلة (20) شكل المعادلة (16) وتحل دالة δ وهي $\delta(\xi' - \xi'')$ محل رمز δ وهو $\delta_{\xi'\xi''}$ في المعادلة (16). سنستمر في التعامل مع التمثيل الجديد وسنسقط فقط الرمز $*$ اختصارًا. وعليه نكتب المعادلة (20) على الصورة:

$$\langle \xi' | \xi'' \rangle = \delta(\xi' - \xi''). \tag{21}$$

ويمكننا تطوير النظرية على خطوط موازية وقريبة للحالات المنفصلة والمتصلة. في الحالات المنفصلة وباستخدام (16) يكون لدينا:

$$\sum_{\xi'} |\xi'\rangle\langle\xi'|\xi''\rangle = \sum_{\xi'} |\xi'\rangle\delta_{\xi'\xi''} = |\xi''\rangle,$$

حيث المجموع مأخوذ على كل القيم المميزة. وتسري هذه المعادلة على متجه أيمن أساسي $|\xi''\rangle$ وعليه نجد:

$$\sum_{\xi'} |\xi'\rangle\langle\xi'| = 1. \tag{22}$$

وهذه معادلة مفيدة تعبر عن خاصية هامة للمتجهات الأساسية، وهي: «إذا ضربت $|\xi'\rangle$ من اليمين بالمتجه الأيسر $\langle\xi'|$ فالمؤثر الخطي الناتج عند جمعه لكل ξ' يساوي مؤثر الوحدة.» المعادلتان (16)، (22) تعطيان الخواص الأساسية للمتجهات الأساسية للحالة المنفصلة.

وبالمثل، لدينا في الحالة المتصلة، وباستخدام المعادلة (21):

$$\int |\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'|\xi''\rangle = \int |\xi'\rangle d\xi' \delta(\xi' - \xi'') = |\xi''\rangle \tag{23}$$

من تطبيق المعادلة (4) بأخذ $f(x)$ عبارة عن متجه أيمن، ويكون مدى التكامل هو مدى القيم المميزة. وهذا يسري على أي متجه أيمن أساسي $|\xi''\rangle$ ومن ثم:

$$\int |\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'| = 1. \tag{24}$$

وهي على نفس الصيغة (22) على أن يحل التكامل محل المجموع. المعادلتان (21)، (24) تعطيان الخواص الأساسية للمتجهات الأساسية للحالة المتصلة.

المعادلتان (22)، (24) تمكن من فك أي متجه أيسر أو متجه أيمن بدلالة المتجهات الأساسية. فعلى سبيل المثال، نحصل بالنسبة للمتجه الأيمن $|P\rangle$ في الحالة المنفصلة:

$$|P\rangle = \sum_{\xi'} |\xi'\rangle\langle\xi'|P\rangle, \tag{25}$$

وذلك بضرب المعادلة (22) من اليمين في المتجه $|P\rangle$. المعادلة (25) تعطي مفكوك $|P\rangle$ بدلالة $|\xi'\rangle$'s وتوضح أن معاملات المفكوك هي $\langle\xi'|P\rangle$ وهي الأعداد المكونة لمثل $|P\rangle$. وبالمثل في الحالة المتصلة:

$$|P\rangle = \int |\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'|P\rangle, \tag{26}$$

لتعطي $\langle P|$ كتكامل على $\langle \xi'|$'s، ومعاملات الدالة المكاملة أيضًا هي الممثل $\langle \xi'|P\rangle$ للمتجه $\langle P|$. والمعادلات المرافقة التخيلية للمعادلتين (25)، (26) تعطي المتجه الأيسر $\langle P|$ مفكوكًا بدلالة المتجهات اليسرى الأساسية.

وتمكننا طرقنا الرياضية الحالية في الحالة المتصلة، من فك أي متجه أيمن كتكامل للمتجهات اليمنى المميزة للمؤثر ξ. وإذا لم نستخدم رمز الدالة δ، فمفكوك متجه أيمن عام سيتكون من تكامل ما بالإضافة إلى مجموع، كما في المعادلة (25) الباب ١٠. لكن الدالة δ تمكننا من استبدال التكامل بالمجموع، تتكون الدالة المكامَلة فيه من حدود يحتوي كل منها الدالة δ كمعامل. فمثلًا يمكن استبدال تكامل المتجهات اليمنى المميزة بالمتجه الأيمن $|\xi''\rangle$ كما هو موضح بالمعادلة الثانية في المعادلات (23).

إذا كان $\langle Q|$ أي متجه أيسر و$|P\rangle$ متجه أيمن يمكن أن نحصل على:

$$\langle Q|P\rangle = \sum_{\xi'} \langle Q|\xi'\rangle\langle\xi'|P\rangle \tag{27}$$

وباستخدامات إضافية للمعادلات (22)، (24) في الحالة المنفصلة، وفي الحالة المتصلة يكون لدينا:

$$\langle Q|P\rangle = \int \langle Q|\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'|P\rangle \tag{28}$$

وهذه المعادلات تعبر عن حاصل الضرب القياسي لكل من $\langle Q|, |P\rangle$ بدلالة الممثلات $\langle Q|\xi'\rangle$ و$\langle \xi'|P\rangle$ لهذين المتجهين. المعادلة (27) هي تمامًا الصيغة المعتادة لحاصل الضرب القياسي لمتجهين من خلال مركبات المتجهين، والمعادلة (28) هي التعديل الطبيعي لهذه الصيغة في حالة ξ' المتصلة، مع وجود تكامل بدلًا من المجموع.

وتعميم معالجتنا السابقة إلى الحالة عندما يكون للمؤثر ξ قيم مميزة منفصلة ومتصلة هو تعميم مباشر تمامًا. باستخدام ξ^r, ξ^s كرموز للقيم المميزة المنفصلة وξ', ξ'' كرموز للقيم المميزة المتصلة؛ يكون لدينا مجموعة المعادلات التالية:

$$\langle\xi^r|\xi^s\rangle = \delta_{\xi^r\xi^s}, \qquad \langle\xi^r|\xi'\rangle = 0, \qquad \langle\xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi'-\xi'') \tag{29}$$

كتعميم لكل من (16) أو (21). وتعبر هذه المعادلات عن أن المتجهات الأساسية كلها متعامدة وأن المتجهات المنتمية للقيم المميزة المنفصلة معايرة، بينما المنتمية إلى القيم

المميزة المتصلة تكون أطوالها مثبتة طبقًا للقاعدة المؤدية إلى المعادلة (20). ومن (29) يمكننا أن نبرهن أن:

$$\sum_{\xi^r} |\xi^r\rangle\langle\xi^r| + \int |\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'| = 1, \tag{30}$$

كتعميم للمعادلة (22) أو (24)، ويكون مدى التكامل هو مدى القيم المميزة المتصلة. وبمساعدة (30) نحصل مباشرة على:

$$|P\rangle = \sum_{\xi^r} |\xi^r\rangle\langle\xi^r|P\rangle + \int |\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'|P\rangle \tag{31}$$

كتعميم للمعادلة (25) أو (26)، وأيضًا:

$$\langle Q|P\rangle = \sum_{\xi^r} \langle Q|\xi^r\rangle\langle\xi^r|P\rangle + \int \langle Q|\xi'\rangle d\xi' \langle\xi'|P\rangle \tag{32}$$

كتعميم للمعادلة (27) أو (28).

دعنا ننتقل إلى الحالة العامة عندما يكون لدينا عدة مؤثرات مرصودة متبادلة $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u$ مكونة فئة تامة تبادلية، ولنبني تمثيلًا متعامدًا فيه المتجهات الأساسية هي في نفس الوقت متجهات مميزة آنية لهذه المؤثرات جميعًا وتكتب $\langle\xi_1' \cdots \xi_u'|$، $|\xi_1' \cdots \xi_u'\rangle$ ولنفترض أن $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_v$ (حيث $v \leqslant u$) لها قيم مميزة منفصلة بينما المؤثرات $\xi_{v+1}, \ldots, \xi_u$ لها قيم مميزة متصلة.

لنضع الآن في اعتبارنا الكمية: $\langle\xi_1' \cdots \xi_v' \xi_{v+1}' \cdots \xi_u'|\xi_1' \cdots \xi_v' \xi_{v+1}'' \cdots \xi_u''\rangle$. ومن نظرية التعامد يجب أن تتلاشى هذه الكمية ما لم يكن $\xi_s'' = \xi_s'$ لقيم $s = v+1, \ldots, u$. وبمد المعالجة المرتبطة بالتعبير (29) الباب ١٠ للمتجهات المميزة لعدد من المرصودات التبادلية، وبمد المسلمة (30) أيضًا؛ نجد أن التكامل ذا الطيات $(u - v)$ يكون متعددًا لهذه الكمية بالنسبة لكل ξ_s'' على مدى يغطي القيمة ξ_s' ويكون عددًا محدودًا موجبًا. إذا سمينا هذا العدد c'، العلامة $'$ توضح أنها دالة في $\xi_1', \ldots, \xi_v', \xi_{v+1}', \ldots, \xi_u'$، ويمكن التعبير عن نتائجنا بالمعادلة:

$$\begin{aligned} &\langle\xi_1' \cdots \xi_v' \xi_{v+1}' \cdots \xi_u'|\xi_1' \cdots \xi_v' \xi_{v+1}'' \cdots \xi_u''\rangle \\ &= c' \delta(\xi_{v+1}' - \xi_{v+1}'') \cdots \delta(\xi_u' - \xi_u''), \end{aligned} \tag{33}$$

مع عامل δ واحد على الطرف الأيمن لكل قيمة للرقم s من $v + 1$ إلى u. والآن نغير أطوال متجهاتنا الأساسية بحيث تجعل c' مساوية للوحدة بطريقة مشابهة

لتلك التي أدت إلى المعادلة (20). وبتطبيق إضافي لنظرية التعامد نحصل أخيرًا على:

$$\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle = \delta_{\xi_1' \xi_1''} \cdots \delta_{\xi_v' \xi_v''} \delta(\xi_{v+1}' - \xi_{v+1}'') \cdots \delta(\xi_u' - \xi_u''), \quad (34)$$

بدليلين للرمز δ على الطرف الأيمن لكل ξ ذات قيم مميزة منفصلة ودالة δ لكل ξ ذات قيم مميزة متصلة. وهذا تعميم للمعادلة (16) أو (21) في حالة وجود عدة مؤثرات قابلة للرصد متبادلة في الفئة التامة.

ويمكن أن نستنتج من (34) تعميمًا للمعادلة (22) أو (24):

$$\sum_{\xi_1' \cdots \xi_v'} \int \cdots \int |\xi_1' \cdots \xi_u' \rangle d\xi_{v+1}' \cdots d\xi_u' \langle \xi_1' \cdots \xi_u' | = 1, \qquad (35)$$

ويكون التكامل ذا $(u - v)$ طية على كل ξ's للقيم المميزة المتصلة ويكون المجموع على كل القيم ξ's المميزة المنفصلة. تعطي المعادلتان (34)، (35) الخواص الأساسية للمتجهات الأساسية في الحالة الراهنة. يمكننا من المعادلة (35) أن نكتب مباشرة تعميمًا للمعادلتين (25) أو (26) وأيضًا المعادلتين (27) أو (28).

والحالة قيد الاعتبار يمكن تعميمها تعميمًا إضافيًّا بالسماح بأن يكون لبعض المؤثرات ξ's قيمًا مميزة منفصلة ومتصلة. والتعديلات المطلوبة في المعادلات تكون مباشرة تمامًا، ولكن لن تُعطى هنا حيث إنها مربكة عند كتابتها في شكل عام.

هناك بعض المسائل التي فيها يكون من غير المناسب جعل c' في المعادلة (33) مساوية للوحدة، ولكن نجعلها مساوية لدالة محددة في ξ's. لنرمز لهذه الدالة في ξ's بالرمز ρ'^{-1}، عندئذ لدينا بدلًا من (34):

$$\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle = \rho'^{-1} \delta_{\xi_1' \xi_1''} \cdots \delta_{\xi_v' \xi_v''} \delta(\xi_{v+1}' - \xi_{v+1}'') \cdots \delta(\xi_u' - \xi_u''), \quad (36)$$

وبدلا من (35) نحصل على:

$$\sum_{\xi_1' \cdots \xi_v'} \int \cdots \int |\xi_1' \cdots \xi_u' \rangle \rho' d\xi_{v+1}' \cdots d\xi_u' \langle \xi_1' \cdots \xi_u' | = 1. \qquad (37)$$

ويطلق على ρ' دالة الثقل weight function للتمثيل، و$\rho' d\xi_{v+1}' \cdots d\xi_u'$ هو الثقل المتصل بعنصر حجم صغير في فراغ المتغيرات $\xi_{v+1}', \ldots, \xi_u'$.

والتمثيلات التي أخذناها في الاعتبار سالفًا لها كلها دالة ثقل الوحدة. وإيراد دالة ثقل غير مساوية للوحدة، هي كلية، موضوع موائمة ولا تضيف أي شيء لقدرة

التمثيل الرياضية. المتجهات اليسرى الأساسية $|{}^*\langle \xi_1' \cdots \xi_u'$ لتمثيل ما مع دالة الثقل ρ' مرتبطة مع المتجهات اليسرى الأساسية $|\langle \xi_1' \cdots \xi_u'$ للتمثيل المناظر مع دالة ثقل الوحدة بالصيغة:

$$\langle \xi_1' \cdots \xi_u'{}^*| = \rho'^{-1/2} \langle \xi_1' \cdots \xi_u'|, \tag{38}$$

التي يمكن التحقق منه بسهولة. مثال على تمثيل مفيد مع دالة ثقل غير الوحدة هو عندما يكون هناك كميتان ξ's هما الزاوية القطبية θ وزاوية السمت ϕ تعينان اتجاهًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد ويتم أخذ $\rho' = \sin\theta'$. ويكون عنصر الزاوية المجسمة هو $\sin\theta' d\theta' d\phi'$ الموجود في المعادلة (37).

١٧- تمثيل المؤثرات الخطية

رأينا في الباب ١٤ كيف نمثل المتجهات اليمنى واليسرى بفئة من الأعداد. وعلينا الآن أن نؤدي نفس العمل مع المؤثرات الخطية من أجل أن يكون لدينا مشروع متكامل لتمثيل كمياتنا المجردة بفئة من الأعداد. المتجهات الأساسية نفسها التي كانت لدينا في الباب ١٤ يمكن أن تستخدم ثانية لهذا الغرض.

لنعتبر أن المتجهات الأساسية هي في نفس الوقت متجهات مميزة لفئة تامة من المؤثرات المرصودة التبادلية $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u$. إذا كان α أي مؤثر خطي لنأخذ متجهًا عامًا أساسيًّا أيسر $|\langle \xi_1' \cdots \xi_u'$ ومتجهًا عامًا أساسيًّا أيمن $\rangle \xi_1'' \cdots \xi_u''|$ ونكون الأعداد:

$$\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \alpha | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle. \tag{39}$$

هذه الأعداد كافية لتعيين α تمامًا، حيث إنها في المقام الأول تعين المتجه الأيمن $\alpha|\xi_1'' \cdots \xi_u''\rangle$ (لأنها تمدنا بممثل لهذا المتجه الأيمن) وقيمة هذا المتجه الأيمن لجميع المتجهات اليمنى الأساسية $\rangle \xi_1'' \cdots \xi_u''|$ تحدد α. الأعداد في (39) تسمى ممثل representative المؤثر الخطي α أو المتغير الديناميكي α. وهذه الممثلات أكثر تعقيدًا من ممثلات المتجه الأيمن والمتجه الأيسر حيث إنها تشتمل على البارامترات التي تصنف متجهين أساسيين بدلًا من متجه أساسي واحد.

دعنا نختبر صورة هذه الأعداد في حالات بسيطة، لنأخذ أولًا حالة وجود مؤثر وحيد ξ يكون بنفسه فئة تامة تبادلية، ولنفترض أن قيمه المميزة منفصلة وهي ξ'. يصبح ممثل α عندئذ الفئة من الأعداد المنفصلة $\langle \xi' | \alpha | \xi'' \rangle$. وإذا أراد المرء أن يكتب هذه الأعداد صراحة فالطريقة الطبيعية لترتيب هذه الأعداد ستكون على هيئة صفيف

ثنائي البعد، هكذا:

$$\begin{bmatrix} \langle\xi^1|\alpha|\xi^1\rangle & \langle\xi^1|\alpha|\xi^2\rangle & \langle\xi^1|\alpha|\xi^3\rangle & \cdot & \cdot \\ \langle\xi^2|\alpha|\xi^1\rangle & \langle\xi^2|\alpha|\xi^2\rangle & \langle\xi^2|\alpha|\xi^3\rangle & \cdot & \cdot \\ \langle\xi^3|\alpha|\xi^1\rangle & \langle\xi^3|\alpha|\xi^2\rangle & \langle\xi^3|\alpha|\xi^3\rangle & \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{40}$$

حيث $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \ldots$ كلها قيم مميزة للمؤثر ξ. ومثل هذا الصفيف يسمى مصفوفة matrix وتسمى الأعداد عناصر elements المصفوفة. وقد وضعنا اصطلاحًا لعملية الترتيب بأن العناصر التي لها نفس الصف تشير إلى نفس المتجه الأيسر الأساسي وتلك الموجودة في نفس العمود تشير إلى نفس المتجه الأيمن الأساسي.

والعنصر $\langle\xi'|\alpha|\xi'\rangle$ الذي يشير إلى متجهين أساسيين لهما نفس التصنيف يسمى عنصرًا قطريًّا diagonal للمصفوفة، وحيث إن كل العناصر من هذا النوع تقع على قطر المصفوفة، فإذا وضعنا α مساوية للوحدة فيكون لدينا من المعادلة (16) كل العناصر القطرية تساوي الوحدة وكل العناصر الأخرى مساوية للصفر. وتعرف المصفوفة في هذه الحالة بمصفوفة الوحدة unit matrix.

وإذا كانت α حقيقية، فلدينا

$$\langle\xi'|\alpha|\xi''\rangle = \overline{\langle\xi''|\alpha|\xi'\rangle}. \tag{41}$$

وتأثير هذه الشروط على المصفوفة (40) هو جعل العناصر القطرية كلها حقيقية والعناصر الأخرى تساوي المرافق المركب لمعكوسها باتخاذ القطر كمرآة وتعرف المصفوفة عندئذ بأنها هرميتية Hermitian.

إذا وضعنا α مساوية للمؤثر ξ، فنحصل على العنصر العام للمصفوفة.

$$\langle\xi'|\xi|\xi''\rangle = \xi'\langle\xi'|\xi''\rangle = \xi'\delta_{\xi'\xi''}. \tag{42}$$

وهكذا فكل العناصر التي لا تقع على القطر تساوي الصفر. وتعرف هذه المصفوفة بالمصفوفة القطرية diagonal. وعناصر القطر في هذه المصفوفة تكون مساوية تمامًا لقيم ξ المميزة. وإذا وضعنا α مساوية $f(\xi)$، نحصل على الصيغة الأعم:

$$\langle\xi'|f(\xi)|\xi''\rangle = f(\xi')\delta_{\xi'\xi''}, \tag{43}$$

وتكون المصفوفة قطرية أيضًا.

دعنا نعين الآن ممثل حاصل الضرب $\alpha\beta$ لمؤثرين خطيين α, β بدلالة ممثلي العوامل. من المعادلة (22) مع استبدال الرمز ξ''' بالرمز ξ' نحصل على:

$$\langle \xi' | \alpha\beta | \xi'' \rangle = \langle \xi' | \alpha \sum_{\xi'''} | \xi''' \rangle \langle \xi''' | \beta | \xi'' \rangle = \sum_{\xi'''} \langle \xi' | \alpha | \xi''' \rangle \langle \xi''' | \beta | \xi'' \rangle, \quad (44)$$

التي تعطينا النتيجة المطلوبة. توضح المعادلة (44) أن المصفوفة تتكون من العناصر $\langle \xi' | \alpha\beta | \xi'' \rangle$ التي تساوي حاصل ضرب المصفوفتين المكونتين من العناصر $\langle \xi' | \alpha | \xi'' \rangle$ و$\langle \xi' | \beta | \xi'' \rangle$ على الترتيب، طبقًا للقاعدة الرياضية المعتادة في ضرب المصفوفات. وهذه القاعدة تعطي العنصر في الصف r والعمود s لمصفوفة حاصل الضرب كمجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف r من المصفوفة الأولى مع العنصر المقابل في العمود s من المصفوفة الثانية. وضرب المصفوفات ليس تبادليًّا، مثل ضرب المؤثرات الخطية.

ويمكننا تلخيص نتائجنا للحالة عندما يكون هناك مؤثر وحيد ξ فقط له قيم مميزة منفصلة كالتالي:

(أ) كل مؤثر خطي يمثل بمصفوفة.
(ب) مؤثر الوحدة يمثل بمصفوفة الوحدة.
(جـ) المؤثر الخطي الحقيقي يمثل بمصفوفة «هيرميتية».
(د) ξ ودوالها تمثل بمصفوفات قطرية.
(هـ) المصفوفة التي تمثل حاصل ضرب مؤثرين خطيين هي حاصل ضرب المصفوفات الممثلة لعاملي الضرب.

لنضع الآن في اعتبارنا حالة وجود مؤثر ξ وحيد له قيم مميزة متصلة. وممثل α الآن $\langle \xi' | \alpha | \xi'' \rangle$، دوال في المتغيريين ξ', ξ'' المتصلين. من المناسب أن نسمي مثل هذه الدالة «مصفوفة» مستخدمين معنى أعم لهذه الكلمة من أجل أن نتمكن من استخدام المصطلحات للحالة المنفصلة والمتصلة. ولا يمكن لواحدة من هذه المصفوفات العامة بالطبع أن تكتب كصفيف ثنائي البعد كمصفوفة عادية، حيث إن عدد الصفوف والأعمدة لانهائي، ومساوٍ لعدد النقط على خط ما، وعدد عناصره لانهائي ومساو لعدد النقط في مساحة ما.

نرتب تعريفاتنا المتعلقة بالمصفوفات العامة بحيث إن القواعد من (أ) إلى (هـ) المطبقة في حالة القيم المنفصلة تسري أيضًا في حالة القيم المتصلة. ويمثل مؤثر الوحدة بالدالة $\delta(\xi' - \xi'')$. والمصفوفة المعممة المكونة من هذه العناصر نعرفها على أنها

مصفوفة الوحدة. وما زال لدينا المعادلة (41) كشرط للمؤثر α ليكون حقيقيًّا وتعرف المصفوفة المعممة المكونة من العناصر $\langle\xi'|\alpha|\xi''\rangle$ على أنها «هرميتية» عندما تحقق هذا الشرط. وتمثل ξ بالعناصر:

$$\langle\xi'|\xi|\xi''\rangle = \xi'\delta(\xi' - \xi'') \tag{45}$$

و$f(\xi)$ بالعناصر:

$$\langle\xi'|f(\xi)|\xi''\rangle = f(\xi')\delta(\xi' - \xi''), \tag{46}$$

وتعرف المصفوفات المعممة المكونة من هذه العناصر على أنها مصفوفات قطرية. من المعادلة (11) يمكننا بنفس القدر كتابة $\xi'', f(\xi'')$ عوامل للدالة $\delta(\xi' - \xi'')$ في الأطراف اليمنى للمعادلات (45) و(46) على الترتيب. والآن باستخدام المعادلة (24) نجد أن المناظر للمعادلة (44) هو:

$$\langle\xi'|\alpha\beta|\xi''\rangle = \int \langle\xi'|\alpha|\xi'''\rangle d\xi'''\langle\xi'''|\beta|\xi''\rangle, \tag{47}$$

حيث استبدل التكامل بالمجموع، وتعرف الصفوف المعممة المكونة من العناصر على الطرف الأيمن على أنها حاصل ضرب المصفوفات المكونة من $\langle\xi'|\alpha|\xi''\rangle$ و$\langle\xi'|\beta|\xi''\rangle$. مع هذه التعريفات نحفظ التوازي الكامل بين الحالة المنفصلة والحالة المتصلة، وتسري القواعد من (أ) إلى (هـ) لكلتيهما.

ويبرز السؤال كيف نعرف المصفوفة العامة القطرية في الحالة المتصلة؟ حيث عرفنا فقط الأطراف اليمنى للمعادلات (45) و(46) لتكون أمثلة للمصفوفات القطرية. يمكن الميل إلى تعريف المصفوفة القطرية على أنها مصفوفة تتلاشى كل عناصرها (ξ', ξ'') عندما تختلف ξ' اختلافًا ضئيلًا عن ξ''، ولكن هذا لا يبدو مرضيًا، لأن هناك خاصية هامة للمصفوفات القطرية في الحالة المنفصلة، وهي أن أي واحدة تقبل التبديل مع أي واحدة أخرى، ونريد أن تسري هذه الخاصية أيضًا في الحالة المتصلة. ومن أجل أن تقبل المصفوفة المكونة من العناصر $\langle\xi'|\omega|\xi''\rangle$ في الحالة المتصلة التبديل مع تلك المكونة من العناصر على الطرف الأيمن من المعادلة (45)؛ يجب أن يكون لدينا استخدام قاعدة الضرب (47)،

$$\int \langle\xi'|\omega|\xi'''\rangle d\xi'''\xi'''\delta(\xi''' - \xi'') = \int \xi'\delta(\xi' - \xi''')d\xi'''\langle\xi'''|\omega|\xi''\rangle.$$

وبمساعدة الصيغة (4) يختزل هذا إلى:

$$\langle \xi'|\omega|\xi''\rangle \xi'' = \xi' \langle \xi'|\omega|\xi''\rangle \tag{48}$$

أو

$$(\xi' - \xi'')\langle \xi'|\omega|\xi''\rangle = 0.$$

وهنا يعطي، وفقًا للقاعدة التي استنتجت بها المعادلة (13) من المعادلة (12):

$$\langle \xi'|\omega|\xi''\rangle = c'\delta(\xi' - \xi'')$$

حيث c' عدد قد يعتمد على ξ'. وعليه فإن $\langle \xi'|\omega|\xi''\rangle$ له نفس شكل الطرف الأيمن للمعادلة (46). ولهذا السبب «تعرف فقط المصفوفات التي لعناصرها شكل الطرف الأيمن للمعادلة (46) بأنها مصفوفات قطرية.» يمكن التحقق بسهولة من أن كل هذه المصفوفات تقبل التبديل الواحدة مع الأخرى. ويمكن للمرء أن يكون مصفوفات أخرى تتلاشى عناصرها (ξ', ξ'') كلها عندما تختلف ξ' اختلافًا ملحوظًا عن ξ''، ولها شكل مختلف من الشذوذ عندما ξ' تساوي ξ'' [سنورد لاحقًا المشتقة $\delta'(x)$ للدالة δ وستكون $\delta'(\xi' - \xi'')$ مثالًا، [انظر الباب ٢٢ معادلة (19)] ولكن هذه المصفوفات الأخرى ليست قطرية طبقًا للتعريف.

دعنا ننتقل الآن إلى الحالة عندما يوجد لدينا مؤثر وحيد فقط له قيم مميزة منفصلة ومتصلة باستخدام ξ^r, ξ^s لترميز القيم المميزة المنفصلة ξ', ξ'' للقيم المميزة المتصلة الآن يشتمل ممثل α على أربعة أنواع من الكميات $\langle \xi^r|\alpha|\xi^s\rangle, \langle \xi^r|\alpha|\xi'\rangle, \langle \xi'|\alpha|\xi^r\rangle,$ $\langle \xi'|\alpha|\xi''\rangle$. يمكن ضم كل هذه الكميات معا لتكوين نوع عام من المصفوفات، فيها بعض الصفوف والأعمدة المنفصلة كما أن فيها أيضًا مدى متصل من الصفوف والأعمدة. نعرف مصفوفة الوحدة والمصفوفة «الهرميتية» والمصفوفة القطرية وحاصل ضرب مصفوفتين أيضًا لهذا النوع الأعم من المصفوفات؛ بحيث نجعل القواعد (أ)–(هـ) سارية. والتفاصيل هي تعميم مباشر لما سبق ذكره، وليس هناك حاجة لأن تعطى صراحة.

لنعد إلى الحالة العامة في وجود أكثر من مؤثر هي $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u$,ξ's. التعبير (39) الممثل للمؤثر α يمكن مع ذلك النظر إليه على أنه يكون مصفوفة لها صفوف تناظر قيمًا مختلفة $\xi_1', \ldots, \xi_u'$. وأعمدة تناظر قيمًا مختلفة $\xi_1'', \ldots, \xi_u''$ ما لم يكن لكل المؤثرات ξ's قيم مميزة منفصلة، وستكون هذه المصفوفة من النوع المعمم بمدى

متصل من الصفوف والأعمدة. ونرتب مرة أخرى تعريفاتنا بحيث تسري القواعد من (أ) إلى (هـ)، وتعميم القاعدة (د) إلى:

(د) كل مؤثر ξ_m $(m = 1, 2, \ldots, u)$ وأي دالة فيه تمثل بمصفوفة قطرية.

وتعرَّف المصفوفة القطرية الآن بأنها المصفوفة التي عنصرها العام $\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \omega | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle$ يأخذ الشكل:

$$\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \omega | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle = c' \delta_{\xi_1' \xi_1''} \cdots \delta_{\xi_v' \xi_v''} \delta(\xi_{v+1}' - \xi_{v+1}'') \cdots \delta(\xi_u' - \xi_u'') \tag{49}$$

في الحالة عندما يكون للمؤثرات $\xi_1, \ldots, \xi_v$ قيم مميزة منفصلة وللمؤثرات $\xi_{v+1}, \ldots, \xi_u$ قيم مميزة متصلة c'، أي دالة في ξ''s. وهذا التعريف هو التعميم لما كان لدينا في حالة المؤثر الوحيد ξ، يجعل المصفوفات القطرية تقبل التبديل دائمًا بعضها مع البعض. وتعميم التعريفات الأخرى مباشر لا يحتاج إلى كتابته بصراحة.

الآن أي مؤثر خطي لدينا يمثل دائمًا بمصفوفة. ويمثل مجموع مؤثرين خطيين بمجموع المصفوفتين الممثلتين للمؤثرين. هذا مع القاعدة (هـ) يعني أن «المصفوفات تخضع لنفس العلاقات الجبرية التي تخضع لها المؤثرات الخطية.» إذا سرت أي معادلات جبرية على مؤثرات خطية معينة، فنفس المعادلات يجب أن تسري على المصفوفات الممثلة لهذه المؤثرات.

يمكن أن يمتد مشروع المصفوفات ليشمل تمثيلات للمتجهات اليمنى واليسرى. المصفوفات الممثلة للمؤثرات الخطية كلها مصفوفات مربعة لها نفس عدد الصفوف والأعمدة. في الحقيقة هناك تناظر واحد لواحد بين صفوفها وأعمدتها. ويمكن النظر إلى ممثل المتجه الأيمن $|P\rangle$ كمصفوفة ذات عمود واحد بوضع كل الأعداد $\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | P \rangle$ التي تكون هذا الممثل واحدًا تحت الآخر. وعدد صفوف هذه المصفوفة هو نفس عدد الصفوف أو الأعمدة للمصفوفة الممثلة للمؤثرات الخطية. ومثل هذه المصفوفة أحادية العمود يمكن أن تضرب من اليسار بمصفوفة مربعة $\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \alpha | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle$ ممثلة لمؤثر خطي α، وبقاعدة مماثلة لقاعدة ضرب مصفوفتين مربعتين. والناتج مصفوفة أخرى أحادية العمود ذات عناصر معطاة بالصيغة:

$$\sum_{\xi_1'' \cdots \xi_v''} \int \cdots \int \langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \alpha | \xi_1'' \cdots \xi_u'' \rangle d\xi_{v+1}'' \cdots d\xi_u'' \langle \xi_1'' \cdots \xi_u'' | P \rangle.$$

من المعادلة (35) هذا مساوٍ تمامًا $\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | \alpha | P \rangle$ الممثل للمتجه الأيمن $\alpha|P\rangle$. وبالمثل يمكن النظر إلى ممثل متجه ما أيسر $\langle Q|$ كمصفوفة أحادية الصف بوضع كل الأعداد

$\langle Q|\xi_1' \cdots \xi_u'\rangle$ واحدًا بجانب الآخر. ومثل هذه المصفوفة أحادية الصف يمكن أن تضرب من الجهة اليمنى بمصفوفة مربعة $\langle \xi_1' \cdots \xi_u'|\alpha|\xi_1'' \cdots \xi_u''\rangle$ والناتج يكون مصفوفة أخرى أحادية الصف ممثلة للمتجه الأيسر $\langle Q|\alpha$. وهذه المصفوفة أحادية الصف يمكن أن تضرب من اليمين في مصفوفة أحادية العمود تمثل المتجه $|P\rangle$ ويكون الناتج عبارة عن مصفوفة أحادية العنصر فقط وتساوي $\langle Q|P\rangle$، أخيرًا المصفوفة أحادية الصف الممثلة للمتجه الأيسر $\langle Q|$ يمكن أن تضرب من اليسار في المصفوفة أحادية العمود الممثلة للمتجه الأيمن $|P\rangle$، والناتج هو مصفوفة مربعة ما هي إلا ممثل للمؤثر $|P\rangle\langle Q|$. وبهذه الطريقة كل رموزنا المجردة: المؤثرات الخطية، والمتجهات اليسرى والمتجهات اليمنى، يمكن أن تمثل بمصفوفات تخضع لنفس العلاقات الجبرية التي تسري على الرموز المجردة نفسها.

١٨- سعات الاحتمالات

التمثيلات ذات أهمية كبيرة في التفسير الفيزيائي لميكانيكا الكم حيث إنها تقدم طريقة مناسبة للحصول على احتمالات أن يكون للمؤثرات المرصودة قيمًا معينة. حصلنا في الباب ١٢ على احتمال أن يكون للمؤثر المرصود أي قيمة محددة لحالة معطاة، وفي الباب ١٣ عممنا هذه النتيجة وحصلنا على احتمال أن يكون لفئة من المؤثرات المرصودة القابلة للتبديل قيم معينة لحالة معطاة. لنطبق الآن هذه النتيجة على فئة تامة من المرصودات المتبادلة، الفئة ξ's مثلًا التي تعاملنا معها سابقًا. ووفقًا للصيغة (51) في الباب ١٣، واحتمال أن يكون لكل مؤثر ξ_r القيمة ξ_r' لحالة مقابلة لمتجه أيمن معاير $|x\rangle$ هو:

$$P_{\xi_1' \cdots \xi_u'} = \langle x|\delta_{\xi_1\xi_1'}\delta_{\xi_2\xi_2'} \cdots \delta_{\xi_u\xi_u'}|x\rangle. \tag{50}$$

إذا كانت كل القيم المميزة للمؤثرات ξ's قيمًا منفصلة يمكننا استخدام (35) مع $v = u$ وبدون تكاملات، ونحصل على:

$$\begin{aligned} P_{\xi_1' \cdots \xi_u'} &= \sum_{\xi_1'' \cdots \xi_u''} \langle x|\delta_{\xi_1\xi_1'}\delta_{\xi_2\xi_2'} \cdots \delta_{\xi_u\xi_u'}|\xi_1'' \cdots \xi_u''\rangle\langle\xi_1'' \cdots \xi_u''|x\rangle \\ &= \sum_{\xi_1'' \cdots \xi_u''} \langle x|\delta_{\xi_1''\xi_1'}\delta_{\xi_2''\xi_2'} \cdots \delta_{\xi_u''\xi_u'}|\xi_1'' \cdots \xi_u''\rangle\langle\xi_1'' \cdots \xi_u''|x\rangle \\ &= \langle x|\xi_1' \cdots \xi_u'\rangle\langle\xi_1' \cdots \xi_u'|x\rangle \\ &= |\langle\xi_1' \cdots \xi_u'|x\rangle|^2. \end{aligned} \tag{51}$$

وهكذا وصلنا إلى النتيجة البسيطة، وهي أن «الاحتمال أن تأخذ المؤثرات ξ's القيم ξ' هي مربع معيار الإحداثيات المناسبة للمتجه الأيمن المعاير والمناظر للحالة قيد الاعتبار» إذا لم يكن لكل المؤثرات قيمًا مميزة منفصلة، ولكن إذا كان مثلًا للمؤثرات $\xi_1,\ldots,\xi_v$ قيم مميزة منفصلة وللمؤثرات $\xi_{v+1},\ldots,\xi_u$ قيم مميزة متصلة، فللحصول على شيء ذي معنى فيزيائي يجب أن نحصل على الاحتمال ليكون للمؤثرات ξ_r $(r = 1,\ldots,v)$ قيم محددة قيمة ξ_r'، وليكون للمؤثرات ξ_s $(s = v + 1,\ldots,u)$ قيمة تقع في مدى محدد ضيق من ξ_s' إلى $\xi_s' + d\xi_s'$. ولهذا الغرض يجب أن نستبدل بكل العوامل $\delta_{\xi_s\xi_s'}$ في المعادلة (50) العوامل χ_s وهي دوال في المؤثرات المرصودة ξ_s التي تساوي الوحدة إذا وقعت ξ_s خلال المدى ξ_s' إلى $\xi_s' + d\xi_s'$، وصفرًا فيما غير ذلك. وباتباع الخطوات السابقة وبمساعدة المعادلة (35) نحصل على هذا الاحتمال:

$$P_{\xi_1'\ldots\xi_u'}d\xi_{v+1}'\cdots d\xi_u' = |\langle\xi_1'\cdots\xi_u'|x\rangle|^2 d\xi_{v+1}'\cdots d\xi_u'. \qquad (52)$$

وعليه في كل حالة يعطى «توزيع الاحتمال للقيم التي تأخذها المؤثرات ξ's بمربع سعة ممثل المتجه الأيمن المعاير والمناظر للحالة تحت الاعتبار».

الأعداد التي تكون الممثل لمتجه أيمن (أو أيسر) معاير يمكن لهذا السبب أن تسمى «سعة الاحتمالات». مربع سعة الاحتمال هو احتمال عادي أو الاحتمال على وحدة المدى للمتغيرات التي لقيمها مدى متصل.

وقد نهتم بالحالة التي لا يمكن معايرة متجهها الأيمن المناظر $|x\rangle$. يحدث هذا مثلًا إذا كانت الحالة حالة مميزة لمؤثر مرصود تنتمي إلى قيمة مميزة تقع في مدى بين القيم المميزة المتصلة. الصيغة (51) أو (52) يمكن أن تظل مستخدمة لتعطي احتمالًا نسبيًّا لكل ξ's تأخذ قيمًا معينة أو قيمًا تقع في مدى ضيق معين. أي أنها تعطي بالضبط نسبة الاحتمالات لقيم ξ''s. والأعداد $\langle\xi_1'\cdots\xi_u'|x\rangle$ يمكن أن تسمى عندئذ «سعات الاحتمال النسبي».

التمثيلات التي تسري عليها النتائج السابقة توسم بواسطة متجهات أساسية تكون متجهات مميزة آنية لكل المؤثرات ξ's. قد توسم أيضًا بضرورة أن كل المؤثرات ξ's، يجب أن يكون ممثلًا بمصفوفة قطرية، وهذا الشرط يمكن رؤيته بسهولة على أنه مكافئ للشرط السابق. والسمة الأخيرة عادة ما تكون الأكثر ملائمة. وللاختصار سنصوغه بأن كل المؤثرات ξ's تكون قطرية في التمثيل.

يعرف التمثيل تمامًا بالسمة شريطة أن تُكوِّن ξ's «فئة تامة» من المرصودات المتبادلة، عدا عوامل طور اختيارية في المتجهات الأساسية. يمكن أن يضرب كل متجه

أيسر أساسي $|\xi'_u \cdots \xi'_1\rangle$ في العامل $e^{i\gamma'}$، حيث γ' أي دالة حقيقية في $\xi'_1, \ldots, \xi'_u$، وبدون تغيير أي شرط من الشروط التي يجب أن يستوفيها التمثيل، أي: شرط أن تكون المؤثرات ξ's قطرية، أو أن المتجهات الأساسية هي متجهات مميزة للمؤثرات ξ's في نفس الوقت، وسريان الخواص الأساسية للمتجهات الأساسية (34)، (35). وبتغيير المتجهات اليسرى الأساسية بهذه الطريقة وبضرب الممثل $\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u|P\rangle$ للمتجه الأيمن $|P\rangle$ في $e^{i\gamma'}$، فيضرب الممثل $\langle Q|\xi'_1 \cdots \xi'_u\rangle$ للمتجه الأيسر $\langle Q|$ في المقدار $e^{-i\gamma'}$، والممثل $\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u|\alpha|\xi''_1 \cdots \xi''_u\rangle$ للمؤثر α يضرب في $e^{i(\gamma'-\gamma'')}$. بينما الاحتمالات أو الاحتمالات النسبية (51)، (52) لا تتغير في هذه الحالة بالطبع.

الاحتمالات التي يتم حسابها في المسائل التطبيقية في ميكانيكا الكم، نحصل عليها دائمًا من مربعات سعات الاحتمال أو مربعات سعات الاحتمال النسبي. حتى عندما يكون الاهتمام منصبًا على احتمال أن يكون لفئة ما غير تامة من المؤثرات المرصودة المتبادلة قيم معينة، فإنه عادة من الضروري أن نجعل الفئة فئة تامة، وذلك بإدخال بعض المؤثرات المرصودة المتبادلة الإضافية والحصول على الاحتمال أن يكون للفئة التامة قيم محددة (كمربع سعة الاحتمال)، ثم التجميع والتكامل على كل القيم الممكنة للمؤثرات المرصودة الإضافية. عادة ما لا يمكن إجراء التطبيق المباشر للصيغة (51) في الباب ١٣.

يلزمنا، عند الممارسة، لتقديم تمثيل ما يلي:

(أ) نبحث عن المؤثرات المرصودة التي نريد أن تكون قطرية، إما بسبب اهتمامنا باحتمالاتها أو لأسباب التبسيط الرياضي.
(ب) يجب أن نتأكد من أن جميعها تقبل التبديل — شرط ضروري حيث إن كل المصفوفات القطرية تقبل التبديل.
(جـ) نرى عندئذ أنها تكون فئة تامة تبادلية، وإذا لم يكن، نضيف بعض المؤثرات المرصودة المتبادلة إليها لجعل الفئة تبادلية تامة.
(د) نبني تمثيلًا متعامدًا تكون فيه هذه الفئة التامة التبادلية قطرية.

حينئذ يكون التمثيل معرفًا تعريفًا تامًّا عدا عوامل الطور الاختيارية. في معظم الأغراض تكون عوامل الطور الاختيارية ليست مهمة أو ليست ذات بال، يمكننا اعتبار التمثيل معرفًا تامًّا بواسطة المؤثرات المرصودة التي تكون قطرية فيه. هذه الحقيقة متضمنة مسبقًا في ترميزنا، حيث إن الإشارة الوحيدة للممثل في التمثيل الذي ينتمي إليه هي الحروف التي تشير إلى المؤثرات المرصودة ذات التمثيل القطري.

قد يحدث أن نكون مهتمين بتمثيلين اثنين لنفس النظام الديناميكي. افترض أن في أحدهما تكون فئة المؤثرات المرصودة التامة التبادلية $\xi_1,\ldots,\xi_u$ قطرية، وأن المتجهات اليسرى الأساسية هي $\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|$ وفي التمثيل الآخر تكون فئة المؤثرات المرصودة التبادلية التامة $\eta_1,\ldots,\eta_w$ قطرية والمتجهات اليسرى الأساسية هي $\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|$. أي متجه أيمن $|P\rangle$ سيكون له الآن ممثلان $\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|P\rangle$ و$\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|P\rangle$. إذا كان للمؤثرات $\xi_1,\ldots,\xi_v$ قيمة مميزة منفصلة وللمؤثرات $\xi_{v+1},\ldots,\xi_u$ قيم مميزة متصلة، وإذا كانت للمؤثرات $\eta_1,\ldots,\eta_x$ قيم مناظرة منفصلة وللمؤثرات $\eta_{x+1},\ldots,\eta_w$ قيم مميزة متصلة نحصل من (35) على:

$$\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|P\rangle = \sum_{\xi'_1\cdots\xi'_v}\int\cdots\int\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|\xi'_1\cdots\xi'_u\rangle d\xi'_{v+1}\cdots d\xi'_u\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|P\rangle, \tag{53}$$

وبتبادل ξ's وη's.

$$\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|P\rangle = \sum_{\eta'_1\cdots\eta'_x}\int\cdots\int\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|\eta'_1\cdots\eta'_w\rangle d\eta'_{x+1}\cdots d\eta'_w\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|P\rangle. \tag{54}$$

هذه هي معادلات التحويل التي تعطي ممثلًا للمتجه $|P\rangle$ بدلالة الآخر. وتوضح هاتان المعادلتان أن أي ممثل معبر عنه خطيًّا بدلالة الآخر، مع وجود الكميات:

$$\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|\xi'_1\cdots\xi'_u\rangle,\qquad\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|\eta'_1\cdots\eta'_w\rangle \tag{55}$$

كعوامل. وتسمى هذه الكميات بدوال التحويل transformation functions. ويمكن كتابة معادلات مشابهة لربط ممثلين اثنين لمتجه أيسر أو لمؤثر خطي. ودوال التحويل (55) تعني في كل حالة الوسيلة التي تمكن المرء من الانتقال من ممثل إلى آخر. كلتا الدالتين من دوال التحويل هي المرافق المركب للآخر وتحققان الشروط.

$$\sum_{\xi'_1\cdots\xi'_v}\int\cdots\int\langle\eta'_1\cdots\eta'_w|\xi'_1\cdots\xi'_u\rangle d\xi'_{v+1}\cdots d\xi'_u\langle\xi'_1\cdots\xi'_u|\eta''_1\cdots\eta''_w\rangle = \delta_{\eta'_1\eta''_1}\cdots\delta_{\eta'_x\eta''_x}\delta(\eta'_{x+1}-\eta''_{x+1})\cdots\delta(\eta'_w-\eta''_w \tag{56}$$

والشروط المناظرة مع تبادل ξ's وη's. كما يمكن التحقق من ذلك من المعادلات (35) و(34) والمعادلات المناظرة للمتغيرات η's.

دوال التحويل هي مثال لسعات الاحتمال أو سعات الاحتمال النسبي. لنضع في اعتبارنا الحالة عندما تكون كل قيم ξ's وη's المميزة منفصلة. عندئذ يكون المتجه الأيمن الأساسي $|\eta'_1 \cdots \eta'_w\rangle$ معايرًا بحيث يكون ممثله في التمثيل ξ هو $\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u | \eta'_1 \cdots \eta'_w \rangle$ وهو سعة الاحتمال لكل فئة من القيم ξ''s. والحالة التي تشير إليها سعات الاحتمال هذه أي: الحالة المناظرة للمتجه $|\eta'_1 \cdots \eta'_w\rangle$؛ تتسم بالشرط أن القياسات الآنية للمؤثرات $\eta_1, \ldots, \eta_w$ تؤدي بالتأكيد إلى النتائج $\eta'_1, \ldots, \eta'_w$ وعليه فإن $|\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u | \eta'_1 \cdots \eta'_w \rangle|^2$ هي الاحتمال أن تأخذ المؤثرات ξ's القيم $\xi'_1 \cdots \xi'_u$ في الحالة التي تأخذ فيها المؤثرات η's القيم $\eta'_1 \cdots \eta'_w$ بالتأكيد. وحيث إن:

$$|\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u | \eta'_1 \cdots \eta'_w \rangle|^2 = |\langle \eta'_1 \cdots \eta'_w | \xi'_1 \cdots \xi'_u \rangle|^2,$$

يكون لدينا النظرية العكسية: «احتمال أن تأخذ المؤثرات ξ's القيم ξ' للحالة التي تأخذ فيها المؤثرات η's القيم η' بالتأكيد، تكون مساوية لاحتمال أن تأخذ المؤثرات η's القيم η' للحالة التي تأخذ فيها المؤثرات ξ's بالتأكيد القيم ξ'.»

إذا كانت كل قيم η's المميزة منفصلة وبعض قيم ξ's متصلة تظل $|\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u | \eta'_1 \cdots \eta'_w \rangle|^2$ تعطي احتمال توزيع قيم ξ's للحالة التي تأخذ فيها المؤثرات η's بالتأكيد القيم η'. وإذا كان للمؤثر η's قيم مميزة متصلة، فإن المتجه $|\eta'_1 \cdots \eta'_w\rangle$ لن يكون معايرًا. وحينئذ فإن $|\langle \xi'_1 \cdots \xi'_u | \eta'_1 \cdots \eta'_w \rangle|^2$ تعطي فقط توزيع الاحتمال النسبي لقيم المؤثرات ξ's للحالة التي تأخذ فيها المؤثرات η's بالتأكيد القيم η'.

١٩- نظريات حول دوال المؤثرات المرصودة

سنوضح القيمة الرياضية للتمثيلات باستخدامها لإثبات بعض النظريات.

نظرية (١): أي مؤثر خطي يقبل التبديل مع المؤثر المرصود ξ يقبل التبديل أيضًا مع أي دالة للمؤثر ξ.

صحة هذه النظرية واضحة، عندما يعبر عن الدالة كمتسلسة قوى. ولبرهنتها في الحالة العامة، ليكن ω هو المؤثر الخطي. وبهذا تكون لدينا المعادلة:

$$\xi\omega - \omega\xi = 0. \tag{57}$$

دعنا نورد تمثيلًا تكون فيه ξ قطرية. إذا لم تكن ξ بنفسها تكون فئة تبادلية تامة للمؤثرات المرصودة، فيجب علينا أن نضعها في فئة تبادلية تامة، وذلك بإضافة بعض المؤثرات المرصودة إليها، مثلًا β وعندئذ نأخذ التمثيل الذي تكون فيه كل من ξ وβ's قطرية (الحالة عندما تكون ξ بنفسها فئة تبادلية تامة، يمكن النظر إليها كحالة خاصة من الحالة السابقة، فيها عدد المتغيرات β مساوٍ للصفر). في هذا التمثيل تصبح المعادلة (57):

$$\langle \xi' \beta' | \xi\omega - \omega\xi | \xi'' \beta'' \rangle = 0,$$

وهي تختزل إلى:

$$\xi' \langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle - \langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle \xi'' = 0.$$

عندما تكون القيم المميزة منفصلة، توضح هذه المعادلة أن كل عناصر المصفوفة $\langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle$ للمؤثر ω تتلاشى عدا العناصر التي فيها $\xi'' = \xi'$. أما عندما تكون قيم ξ المميزة متصلة، فتوضح المعادلة — مثل المعادلة (48) — أن العنصر $\langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle$ يأخذ الشكل:

$$\langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle = c\delta(\xi' - \xi''),$$

حيث c دالة في ξ' وβ''s وβ'''s. في كلتا الحالتين يمكن القول إن المصفوفة الممثلة للمؤثر ω «تكون قطرية بالنسبة إلى ξ'». إذا كانت $f(\xi)$ تشير إلى أي دالة في ξ تبعًا للنظرية العامة الباب ١١، التي تستدعي أن تكون $f(\xi''')$ معرفة لأي قيمة مميزة ξ''' للمؤثر ξ، فيمكن أن نستنتج في أي من الحالتين أن:

$$f(\xi') \langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle - \langle \xi' \beta' | \omega | \xi'' \beta'' \rangle f(\xi'') = 0.$$

وهي تعطي:

$$\langle \xi' \beta' | f(\xi)\omega - \omega f(\xi) | \xi'' \beta'' \rangle = 0,$$

وبذلك

$$f(\xi)\omega - \omega f(\xi) = 0$$

مما يثبت النظرية.

وكحالة خاصة من النظرية، لدينا النتيجة أن أي مؤثر مرصود يقبل التبديل مع أي مؤثر مرصود آخر ξ، فهو يقبل التبديل أيضًا مع أي دالة في ξ. تظهر هذه النتيجة كضرورة فيزيائية عندما نطابق — كما في الباب ٣ — شرط القابلية للتبديل لمؤثرين مرصودين مع شرط توافق المشاهدات المناظرة. أي رصد متوافق مع عملية القياس لمؤثر مرصود ما ξ، فيجب أيضًا أن يكون متوافقًا مع عملية قياس $f(\xi)$، حيث إن أي عملية قياس لمؤثر ξ تشمل بنفسها عملية قياس $f(\xi)$.

نظرية (٢): أي مؤثر خطي يقبل التبديل مع كل عناصر فئة تامة من المرصودات التبادلية يكون دالة في هذه المرصودات.

ليكن ω المؤثر الخطي و$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_u$ الفئة التامة من المؤثرات المرصودة التبادلية، ولنكون تمثيلًا تكون فيه هذه المؤثرات قطرية. حيث إن ω يقبل التبديل مع كل المؤثرات ξ's، فتكون المصفوفة الممثلة له قطرية بالنسبة لكل ξ's، طبقًا للبرهان السابق. لذا فإن هذه المصفوفة تكون قطرية ولها الشكل (49) وتشتمل على عدد ما c' يكون دالة في ξ''s. وعليه تمثل الدالة في ξ's ما تمثله c' في المتغيرات ξ''s ومن ثم ω تساوي هذه الدالة في ξ's.

نظرية (٣): إذا كان ξ مؤثرًا مرصودًا، وكان g مؤثرًا خطيًّا، بحيث إن أي مؤثر خطي يقبل التبديل مع ξ يقبل أيضًا التبديل مع g؛ فإن g دالة في ξ.

هذه النظرية معكوس نظرية (١). ولإثباتها نستخدم نفس التمثيل باعتبار ξ قطرية كما في نظرية (١). في المقام الأول، نرى أن g يجب أن تقبل التبديل مع ξ نفسها، ومن ثم يجب أن يكون ممثل g قطري بالنسبة لـ ξ، أي أنه يجب أن يكون على الشكل:

$$\langle \xi'\beta'|g|\xi''\beta''\rangle = a(\xi'\beta'\beta'')\delta_{\xi'\xi''}$$

أو

$$a(\xi'\beta'\beta'')\delta(\xi' - \xi''),$$

طبقًا لكون القيم المميزة منفصلة أو متصلة. والآن ليكن ω أي مؤثر خطي يقبل التبديل مع ξ، بحيث يكون ممثله على الشكل التالي:

$$\langle \xi'\beta'|\omega|\xi''\beta''\rangle = b(\xi'\beta'\beta'')\delta_{\xi'\xi''}$$

أو

$$b(\xi' \beta' \beta'') \delta(\xi' - \xi'').$$

ومن الفرض فلا بد أن ω تقبل التبديل مع g أيضًا بحيث:

$$\langle \xi' \beta' | g\omega - \omega g | \xi'' \beta'' \rangle = 0. \tag{58}$$

إذا افترضنا تحديدًا أن β's لها قيم مميزة منفصلة، فالمعادلة (58) تؤدي بمساعدة قانون ضرب المصفوفات، إلى:

$$\sum_{\beta'''} \{a(\xi' \beta' \beta''') b(\xi' \beta''' \beta'') - b(\xi' \beta' \beta''') a(\xi' \beta''' \beta'')\} = 0, \tag{59}$$

فالطرف الأيسر للمعادلة (58) يكون مساويًا للطرف الأيسر من (59) مضروبًا في $\delta_{\xi' \xi''}$ أو $\delta(\xi' - \xi'')$. ويجب أن تسري المعادلة (59) على كل الدوال $b(\xi' \beta' \beta'')$. ويمكن أن نستنتج أن:

$$a(\xi' \beta' \beta'') = 0 \quad \text{for } \beta' \neq \beta'',$$
$$a(\xi' \beta' \beta') = a(\xi' \beta'' \beta'').$$

وأولى هذه النتائج توضح أن المصفوفة الممثلة للمؤثر g قطرية، وتوضح الثانية أن $a(\xi' \beta' \beta')$ دالة في ξ' فقط. ويمكن أن نستدل على أن g هي تلك الدالة في ξ التي تمثلها $a(\xi' \beta' \beta')$ في ξ'. وهكذا تثبت النظرية. والإثبات مماثل إذا كان بعض المؤثرات β's له قيم مميزة متصلة.

تظل النظريتان (١)، (٣) ساريتين إذا استبدلنا بالمؤثر المرصود ξ أي فئة من المؤثرات المرصودة التبادلية $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$، تحتاج فقط إلى تغيرات شكلية لإكمال البرهان.

٢٠- تطورات في الترميز

تمدنا نظرية التمثيلات التي طورناها بنظام عام لتصنيف المتجهات اليمنى واليسرى. في التمثيل الذي تكون فيه الفئة التامة من المرصودات التبادلية $\xi_1, \ldots, \xi_u$ قطرية، أي متجه أيمن $|P\rangle$ سيكون له ممثل $\langle \xi_1' \cdots \xi_u' | P \rangle$ أو اختصارًا $\langle \xi' | P \rangle$. وهذا الممثل دالة محددة في المتغيرات ξ'، $\psi(\xi')$ مثلًا. وتحدد الدالة ψ المتجه الأيمن $|P\rangle$ تمامًا.

وعليه يمكن أن نستخدمه لتصنيف المتجه الأيمن ونستبدله بالتصنيف الاختياري P. باستخدام الرموز، وإذا كان:

$$\langle \xi' | P \rangle = \psi(\xi') \qquad (60)$$
$$|P\rangle = |\psi(\xi)\rangle.$$

ويجب أن نضع $\langle P|$ مساوية لـ $\langle \psi(\xi)|$ وليس لـ $\langle \psi(\xi')|$ حيث إنها لا تعتمد على فئة معينة من القيم المميزة للمؤثر ξ's ولكن فقط على شكل الدالة ψ.

إذا كانت $f(\xi)$ أي دالة للمؤثرات المرصودة $\xi_1, \ldots, \xi_u$ فسيكون ممثل المتجه $f(\xi)|P\rangle$ هو:

$$\langle \xi' | f(\xi) | P \rangle = f(\xi') \psi(\xi').$$

وفقًا للمعادلة (60) نضع:

$$f(\xi)|P\rangle = |f(\xi)\psi(\xi)\rangle.$$

وبمساعدة المعادلة الثانية في (60) نحصل الآن على:

$$f(\xi)|\psi(\xi)\rangle = |f(\xi)\psi(\xi)\rangle. \qquad (61)$$

وهذه نتيجة عامة تسري على أي دوال f وψ في المؤثرات ξ's، وتوضح أن الخط الرأسي | ليس ضروريًّا مع الترميز الجديد للمتجه الأيمن. أي جانب في (61) يمكن أن يكتب ببساطة$\langle f(\xi)\psi(\xi)$. وهكذا تصبح القاعدة في الترميز الجديد هي:

$$\langle \xi' | P \rangle = \psi(\xi') \qquad (62)$$
$$|P\rangle = \psi(\xi)\rangle.$$

وقد نجري اختصارًا إضافيًّا بكتابة $\langle \psi(\xi)$ فقط $\langle \psi$ تاركين المتغيرات ξ مفهومة إذا لم يثر أي التباس.

المتجه الأيمن $\langle \psi(\xi)$ يمكن اعتباره حاصل ضرب المؤثر الخطي $\psi(\xi)$ مع متجه أيمن يمثل ببساطة بـ $\langle$ بلا أي تصنيف. ونسمي المتجه الأيمن $\langle$ المتجه الأيمن (القياسي). أي متجه أيمن مهما كان يمكن تمثيله كدالة في ξ's مضروبة في متجه أيمن قياسي. وعلى سبيل المثال وبأخذ $\langle P|$ في (62) ليكون متجهًا أيمن أساسيًّا $\langle \xi''|$ نجد:

$$|\xi''\rangle = \delta_{\xi_1 \xi_1''} \cdots \delta_{\xi_v \xi_v''} \delta(\xi_{v+1} - \xi_{v+1}'') \cdots \delta(\xi_u - \xi_u'')\rangle \qquad (63)$$

في حالة كون قيم $\xi_1, \ldots, \xi_v$ المميزة منفصلة وقيم $\xi_{v+1}, \ldots, \xi_u$ المميزة متصلة. والمتجه الأيمن القياسي يتسم بشرط أن ممثله $\langle \xi' | \rangle$ يساوي الواحد على كل نطاق المتغير ξ'، كما يمكن أن يُرى ذلك بوضع $\psi = 1$ في (62).

يمكن عمل اختصار إضافي في الترميز، أي لنحذف الرمز $\rangle$ للمتجه الأيمن القياسي باعتباره مفهومًا. أي متجه أيمن يكتب عندئذ ببساطة $\psi(\xi)$، دالة ما في المرصودات ξ. ودالة ξ's المستخدمة بهذه الطريقة لترمز إلى متجه أيمن تعرف «بالدالة الموجية».* ونظام الترميز بواسطة الدوال الموجية هو النظام المستخدم عادة عند معظم المؤلفين في الحسابات في ميكانيكا الكم. وعند استخدامه يجب أن يتذكر المرء أنه من المفهوم أن كل دالة موجية لها متجه أيمن قياسي مضروب فيها من اليمين، وهو يمنع المرء من ضرب الدالة الموجية بأي مؤثر خطي من اليمين. «ويمكن ضرب الدوال الموجية بالمؤثرات الخطية فقط من اليسار.» وهذا يميزها عن الدوال العادية في ξ's التي هي مؤثرات ويمكن ضربها بمؤثرات من اليمين أو من اليسار. الدالة الموجية إن هي إلا الممثل لمتجه ما أيمن معبرًا عنه كدالة في المؤثرات المرصودة ξ، بدلًا من القيم المميزة ξ' لهذه المؤثرات. ويعطي مربع مقياسها الاحتمال (أو الاحتمال النسبي إذا لم تكن معايرة) لتأخذ المؤثرات ξ's قيمًا محددة أو تقع في مدى ضيق محدد بالنسبة للحالة المناظرة.

يمكن تطوير ترميز المتجهات اليسرى بنفس الطريقة في حالة المتجهات اليمنى. أي متجه أيسر $\langle Q|$ ممثله $\langle Q|\xi'\rangle$ هو $\phi(\xi')$ نكتبه $\langle\phi(\xi)|$. بهذا الترميز يكون المرافق التخيلي لــ $\langle\psi(\xi)\rangle$ هو $\langle\overline{\psi}(\xi)|$. وعليه، فالقاعدة التي استخدمناها حتى الآن هي: أي متجه أيمن ومرافقه التخيلي المتجه الأيسر كلاهما معين بنفس التصنيف؛ يجب أن تمد لتقرأ: **«إذا شمل التصنيف للمتجه الأيمن أعدادًا مركبة أو دوال مركبة فإن التصنيف للمرافق التخيلي يشمل المرافق المركب لهذه الأعداد أو الدوال.»** وكما في حالة المتجهات اليمنى يمكن أن نبين أن $\langle\phi(\xi)|f(\xi)\rangle$ و$\langle\phi(\xi)f(\xi)|$ هما نفس الشيء وبذلك يمكن حذف الخط الرأسي. ويمكن أن نعتبر $\langle\phi(\xi)$ حاصل ضرب المؤثر الخطي $\phi(\xi)$ في «متجه أيسر $\rangle$ قياسي»، وهو المرافق التخيلي للمتجه الأيمن القياسي $\langle$. ويمكن أن نترك المتجه الأيسر القياسي مفهومًا، وعليه يكتب المتجه الأيسر ببساطة $\phi(\xi)$ كمرافق مركب لدالة موجية. المرافق المركب لأي دالة موجية يمكن ضربه من اليمين في مؤثر خطي، ولكن لا يمكن ضربه من اليسار في مؤثر خطي. ويمكن أن نكون حاصل

*السبب في هذا الاسم أنه في المراحل الأولى لميكانيكا الكم كل أمثلة هذه الدوال كانت في شكل موجات ... والاسم ليس وصفيًا من وجهة نظر النظرية العامة الحديثة ....

ضرب ثلاثي بالشكل $\langle f(\xi)\rangle$، وحاصل الضرب الثلاثي هذا هو عدد مساوٍ للدالة $f(\xi)$ مجموع أو مكامَل على كل نطاق القيم المميزة للمؤثرات ξ's:

$$\langle f(\xi)\rangle = \sum_{\xi'_1\cdots\xi'_v} \int\cdots\int f(\xi')d\xi'_{v+1}\cdots d\xi'_u \qquad (64)$$

عندما يكون للمؤثرات $\xi_1,\ldots,\xi_v$ قيم مميزة منفصلة وللمؤثرات $\xi_{v+1},\ldots,\xi_u$ قيم مميزة متصلة.

المتجهات اليمنى واليسرى القياسية معرفة بالنسبة إلى تمثيل ما. إذا أجرينا ما قمنا به سابقًا مع تمثيل مختلف، فيه الفئة التامة من المؤثرات المرصودة التبادلية η قطرية، أو إذا غيرنا فقط عامل الطور في التمثيل الذي فيه ξ's قطرية، يمكن أن نحصل على متجه أيمن ومتجه أيسر قياسيين مختلفين. إذا ظهر في أي جزء من الدراسة أكثر من متجه أيمن قياسي أو متجه أيسر قياسي فيجب على المرء أن يميز بينها بإعطائها تصنيفات مختلفة.

سنناقش الآن تطويرًا آخر في الترميز يمثل أهمية عظيمة في التعامل مع المنظومات الديناميكية المعقدة. نفترض أن لدينا منظومة ديناميكية موصوفة من خلال متغيرات ديناميكية يمكن تقسيمها إلى فئتين، فئة A وفئة B مثلًا، بحيث إن أي عنصر في الفئة A يقبل التبديل مع أي عنصر من الفئة B. أي متغير ديناميكي عام يجب أن يعبر عنه كدالة في متغيرات الفئة A ومتغيرات الفئة B معًا. يمكن أن نأخذ في الاعتبار منظومة ديناميكية أخرى فيها المتغيرات الديناميكية من الفئة A فقط — دعنا نسميها المنظومة A. وبالمثل يمكن أن نضع في اعتبارنا منظومة ديناميكية ثالثة فيها المتغيرات الديناميكية من الفئة B — منظومة B. يمكن النظر إلى المنظومة الأصلية كمزيج من المنظومة A والمنظومة B وفقًا للمشروع الرياضي الذي سيعطى فيما يلي.

دعنا نأخذ أي متجه أيمن $|a\rangle$ متجهًا للمنظومة A وأي متجه أيمن $|b\rangle$ للمنظومة B. وسنفترض أن لهما حاصل ضرب $|a\rangle|b\rangle$ يخضع لمسلمات التبادل والتوزيع للضرب، أي:

$$|a\rangle|b\rangle = |b\rangle|a\rangle,$$

$$\{c_1|a_1\rangle + c_2|a_2\rangle\}\,|b\rangle = c_1|a_1\rangle|b\rangle + c_2|a_2\rangle|b\rangle,$$

$$|a\rangle\,\{c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle\} = c_1|a\rangle|b_1\rangle + c_2|a\rangle|b_2\rangle,$$

حيث c's أعداد. يمكننا أن نعطي معنى لأي متغير A يؤثر على حاصل الضرب $|a\rangle|b\rangle$ بافتراض أنه يؤثر فقط على العامل $|a\rangle$ ويقبل التبديل مع العامل $|b\rangle$، وبالمثل يمكن أن نعطي معنى لأي متغير B يؤثر على حاصل الضرب بافتراض أنه يؤثر فقط على

العامل $|b\rangle$ ويقبل التبديل مع العامل $|a\rangle$. (وهذا يجعل كل متغير من A يقبل التبديل مع كل متغير من B). وعليه: أي متغير من المنظومة الأصلية يمكن أن يؤثر على حاصل الضرب $|a\rangle|b\rangle$ وبهذا يمكن النظر إلى حاصل الضرب $|a\rangle|b\rangle$ كمتجه أيمن للمنظومة الأصلية. حينئذ يمكن أن يكتب $|ab\rangle$، والتصنيفان a وb كافيان لتمييز المنظومة. بهذه الطريقة يمكن كتابة المعادلات الأساسية

$$|a\rangle|b\rangle = |b\rangle|a\rangle = |ab\rangle. \tag{65}$$

والضرب هنا من نوع مختلف تمامًا عن أي ضرب حدث مبكرًا في النظرية. المتجهات اليمنى $|a\rangle$ و$|b\rangle$ في فراغين اتجاهيين مختلفين وحاصل ضربهما في فراغ اتجاهي ثالث، يمكن أن نسميه حاصل ضرب الفراغين الاتجاهيين السابقين. وعدد أبعاد الفراغ الناتج يساوي حاصل ضرب أبعاد كل من الفراغين. لا يؤخذ المتجه الأيمن العام في الفراغ الناتج بالشكل (65) ولكن بمجموع متجهات يمنى أو تكاملها بهذا الشكل.

دعنا نأخذ تمثيلًا للمنظومة A فيه فئة المؤثرات المرصودة التبادلية التامة ξ_A في المنظومة A قطرية. عندئذ يكون لدينا متجهات يسرى أساسية $\langle\xi'_A|$ للمنظومة A. وبالمثل نأخذ تمثيلًا ما للمنظومة B فيه فئة المؤثرات المرصودة ξ_B قطرية. يكون لدينا المتجهات اليسرى الأساسية $\langle\xi'_B|$ للمنظومة B. حواصل الضرب:

$$\langle\xi'_A|\langle\xi'_B| = \langle\xi'_A\xi'_B| \tag{66}$$

تتيح المتجهات اليسرى الأساسية في تمثيل المنظومة الأصلية. في هذا التمثيل تكون كل من ξ_A's وξ_B's قطرية. ستكون ξ_A's وξ_B's معًا فئة تامة من المؤثرات المرصودة التبادلية للمنظومة الأصلية. من المعادلتين (65) و(66) نحصل على:

$$\langle\xi'_A|a\rangle\langle\xi'_B|b\rangle = \langle\xi'_A\xi'_B|ab\rangle, \tag{67}$$

التي توضح أن ممثل $|ab\rangle$ يساوي حاصل ضرب ممثلي $|a\rangle$ و$|b\rangle$ كل في تمثيله الخاص به.

ويمكننا أن نورد المتجه الأيمن القياسي $\rangle_A$ مثلًا، للمنظومة A، بالنسبة إلى تمثيل تكون فيه ξ_A's قطرية، وأيضًا المتجه الأيمن القياسي $\rangle_B$ للمنظومة B بالنسبة لتمثيل تكون فيه ξ_B's قطرية. وحاصل ضربهما $\rangle_A\rangle_B$ يكون حينئذ متجهًا قياسيًّا للمنظومة

الأصلية بالنسبة لتمثيل تكون فيه كل من ξ_A's, ξ_B's قطرية. أي متجه أيمن في المنظومة الأصلية يمكن أن يعبر عنه كالتالي:

$$\psi(\xi_A\xi_B)\rangle_A\rangle_B. \tag{68}$$

وقد يحدث أنه في بعض الحسابات المعينة نريد أن نستخدم تمثيلًا خاصًّا للنظام B، مثلًا التمثيل السابق تكون فيه ξ_B's قطرية ولكن لا نرغب في تقديم أي تمثيل خاص للمنظومة A. عندئذ، من الملائم أن نستخدم المتجه الأيمن القياسي $\rangle_B$ للمنظومة B مع عدم استخدام أي متجه أيمن قياسي للمنظومة A. ويمكننا أن نكتب تحت هذه الظروف أي متجه أيمن للمنظومة الأصلية كالتالي:

$$|\xi_B\rangle\rangle_B, \tag{69}$$

فيه $|\xi_B\rangle$ متجه أيمن في المنظومة A وأيضًا دالة في ξ_B's أي أنه متجه أيمن للمنظومة A لكل فئة من القيم للمؤثرات ξ_B's — في الواقع (69) تكافئ (68) إذا كتبنا:

$$|\xi_B\rangle = \psi(\xi_A\xi_B)\rangle_A.$$

وربما نترك المتجه الأيمن القياسي $\rangle_B$ مفهومًا في (69)، ومن ثم يكون لدينا متجه أيمن عام للمنظومة يظهر على صورة $|\xi_B\rangle$ وهو متجه أيمن للمنظومة A ودالة موجية في المتغيرات ξ_B في المنظومة B. وسوف يعطى مثال لهذا الترميز في الباب ٦٦ لاحقًا.

يمكن بسط المعالجة السابقة على الفور إلى منظومة ديناميكية موصوفة بدلالة متغيرات ديناميكية يمكن تقسيمها إلى ثلاث من الفئات A وB وC أو أكثر. بحيث إن أي عنصر من عناصر إحدى الفئات يقبل التبديل مع أي عنصر آخر من أي فئة أخرى. ويمكن تعميم المعادلة (65) لنحصل على:

$$|a\rangle|b\rangle|c\rangle\cdots = |abc\cdots\rangle,$$

والعوامل في الطرف الأيسر هي المتجهات اليمنى لمركبات المنظومة، والمتجه الأيمن في الطرف الآخر هو المتجه الأيمن للمنظومة الأصلية. المعادلات (66) و(67) و(68) يمكن أن تعمم لعوامل عديدة بطريقة مماثلة.